

Grundbegriffe und Grundgrößen der Laufzeitstruktur des Zinses

Eine kritisch-analytische Untersuchung
ausgewählter Erklärungshypothesen unter
besonderer Berücksichtigung des
Normalintervall-Modells von Maikiel

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr. rer. pol.)
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen - Nürnberg

vorgelegt von
Dipl.-Kfm. Ulrich Jaeger
aus Dortmund

1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548225_0022

Grundbegriffe und Grundgrößen der Laufzeitstruktur des Zinses

Eine kritisch-analytische Untersuchung
ausgewählter Erklärungshypothesen unter
besonderer Berücksichtigung des
Normalintervall-Modells von Malkiel

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr. rer. pol.)
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen - Nürnberg

vorgelegt von
Dipl.-Kfm. Ulrich Jaeger
aus Dortmund



Referent : Prof. Dr. Oswald Hahn
Korreferent : Prof. Dr. Manfred Neumann
Tag der mündlichen Prüfung: 19. 7. 1977

Gliederung

A	Einleitung	VII
B	Hauptteil	
I.	Grundbegriffe und Grundgrößen der Zinsstruktur	1
1.	Arten der Verzinsung und Tilgung	1
2.	"Couponfreie" und "Couponversehene" Wertpapiere	4
3.	"Wert"-Begriff und "Preis"-(Kurs-) Begriff bei Wertpapieren	8
4.	Der "kurzfristige" Zinssatz, Begriff des Terminzinssatzes	13
5.	Langfristiger Zinssatz und Laufzeitstruktur	22
6.	Laufzeitstruktur und Ertragskurvenverlauf	24
II.	Abhängigkeiten der Grundgrößen der Zinsstruktur voneinander	40
1.	Die Kursformel als Hilfsmittel zur Berechnung von Kurswerten und Effektivzinssätzen	40
2.	Kurs und Effektivzinssatz in Abhängigkeit von der Laufzeit	46
3.	Der Kurs in Abhängigkeit vom Couponsatz	63
4.	Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Couponsatz	73
5.	Angepaßtheit des Effektivzins-(Coupon-)satzes und die charakteristischen Wertes des Effektivzinssatzes	84

6. Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Reihenfolge der Einperioden- terminzinssätze	97
III. Der Mittelwertbegriff bei Zinssätzen, Be- stimmungsmethoden mittlerer Kurse und Effektivzinssätze	115
1. Arten der Mittelwertbildung	115
2. Der mittlere Kurs	128
3. Der mittlere Effektivzinssatz (allgemein)	142
4. Die Mittelwerte bei den "charakteristischen" Effektivzinssätzen	153
IV. Die praktische (numerische) Effektivzinssatz- bestimmung (Näherungsverfahren)	160
1. Bestimmungsverfahren auf der Grundlage der linearen Interpolation	160
a) Das sogenannte exakte Lösungsverfahren (r_e/r_o -Interpolation)	160
b) r_o/r_e -Interpolation als Umkehrung der r_e/r_o -Interpolation	167
c) r_o/r_e -Interpolation bei Verkürzung des Ausgangsintervalles (NVla-Verfahren)	173
d) r_o/r_e -Interpolation bei allgemeiner Gültigkeit der Gleichung $P_o = \overline{P_o}$ (Näherungsverfahren NVla*)	177
e) P_o/r_e -Interpolation beim Ausgangsinter- vall (r_m/r_M) (Näherungsverfahren NV2)	181

f) P_0/r_e -Interpolation bei Verkürzung des Ausgangsintervalles (Näherungsverfahren NV2a und NV2a*)	185
2. Bestimmungsverfahren ohne Verwendung der linearen Interpolation	188
a) Näherungsverfahren zur Bestimmung von r_e mit Hilfe der r_0 -freien Kurskomponente (Näherungsverfahren NV3)	188
b) Näherungsverfahren zur Bestimmung von r_e mittels rekursiver partieller Substitution (NV4, NV4* und NV4a)	196
c) Näherungsverfahren zur Effektivzinssatzbestimmung mit Hilfe des gewichteten harmonischen oder arithmetischen Mittelwertes (NV5)	201
V. Die Zinsstruktur hauptsächlich unter dem Aspekt unterschiedlicher Erwartungen	205
1. Die Kritik an der klassischen Erwartungstheorie	205
a) Das Modell von Hicks	205
b) Das Meiselman-Modell	210
c) Die Verwendung der Meiselman'schen Gleichungen zur Abschätzung der Größe der Liquiditätsprämien durch Buse	212
2. Das Lutz-Modell und das Makro-Modell von Malkiel	221
a) Die Erweiterung der klassischen Erwartungstheorie	221

b) Die Berücksichtigung unterschiedlicher Erwartungen in der graphischen Dar- stellung von Lutz	228
c) Ein Vergleich zwischen dem Lutz-Modell und dem Makro-Modell von Malkiel	233
VI. Das Normalintervall-Modell von Malkiel	239
1. Historisches Intervall und Normalintervall	239
2. Die Laufzeit der Wertpapiere als Ent- scheidungsgrößen der Kapitalanleger	240
3. Die Errechnung des Gesamtnutzens	242
4. Fristigkeits- und Gleichgewichtsstruktur	247
5. Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgrund spezifischer Erwartungen	250
6. Die unterschiedliche Berechnung der Ausgleichszinssätze nach Malkiel und Faßbender und ihre Konsequenz für die Entscheidungsbildung	252
7. Das unmittelbare Bestimmungsverfahren	257
a) Effektivzinssatzberechnung für Konsols mit Hilfe des direkten (ungewogenen) harmonischen Mittels	257
b) Effektivzinssatzberechnung bei Konsols mit Hilfe des direkten (gewogenen) har- monischen Mittels	260
c) Bestimmung des Effektivzinssatzes mit Hilfe des indirekten (ungewogenen) harmonischen Mittels	262

d)	Bestimmung des Effektivzinssatzes für die Zweiperioden-Laufzeit (Zeitraum t bis $t+2$) und für den Einperioden-Effektivzinssatz bei unterschiedlicher Bewertung der Randzinssätze	265
8.	Die verschiedenen Möglichkeiten der Berücksichtigung unterschiedlicher Teilstreifenbreiten und unterschiedlicher Wahrscheinlichkeiten	266
a)	Der Effektivzinssatz für Konsols in Abhängigkeit von der Breite der Teilstreifen und der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die Ränder des Normalintervalls	268
b)	Der Einperioden-Effektivzinssatz in Abhängigkeit von der Breite der Teilstreifen und der Gewichtsverteilung auf die Ränder des Normalintervalls	272
9.	Der Ausgleichskurs des Normalintervall-Modells von Malkiel in Abhängigkeit von der Laufzeit (Kurs/Laufzeit-Kurve)	274
10.	a) Kurvenuntersuchung	277
	b) Untersuchung auf das Vorhandensein von Extremwerten	279
	c) Untersuchung auf Vorhandensein eines Wendepunktes, Festlegung der Art des vorhandenen Extremums	280

11. Ergänzende Bemerkungen zum Kurvenverlauf der Ausgleichskurve in Abhängigkeit von der Laufzeit	284
12. Zusammenfassung	295
C Schluß	299
Literaturverzeichnis	302

A Einleitung

In dieser Arbeit wird das Hauptgewicht der Untersuchung auf den Effektivzinssatz (yield-to-maturity) und seine Bestimmungsgrößen (Folge der Markt- bzw. Einperiodenterminzinssätze, Höhe des Couponsatzes und Länge der Laufzeit) gelegt.

Während die Abhängigkeit der Effektivzinssätze (yield-to-maturity) von der Laufzeit in der Literatur in einer großen Reihe von Veröffentlichungen behandelt worden ist, findet man über die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Höhe des Couponsatzes im Rahmen der Zinsstrukturtheorie kaum eine Abhandlung von Bedeutung.

Diese stiefmütterliche Behandlung erscheint insofern nicht oder schwer verständlich, als - wie in Abschnitt II,5¹ und II,6 gezeigt werden wird - die von Fisher benutzte Formel für den langfristigen Zinssatz der klassischen Erwartungstheorie sich bei der Untersuchung der Beziehungen zwischen Couponsatz und Kurs bzw. Couponsatz und Effektivzinssatz in ganz ungezwungener Weise - mehr oder weniger wie von selbst - nur als Spezialfall für bestimmte Werte des Couponsatzes ergibt.

Die Deutung der Effektivzinssätze als Zinssätze, die sich auf einem Terminmarkt bilden, auf dem Wertpapiere verschiedener Fälligkeiten gehandelt werden, macht den Vergleich von Geldanlagen mit zwischenzeitlichen Auszahlungen (couponversehene Wertpapiere mit Couponbeträgen als Abschlagszahlungen) und von Geldanlagen ohne zwischenzeitliche Auszahlungen (couponfreie Wertpapiere wie z.B. Sparguthaben) erforderlich. Bei letzteren besteht die Rendite ausschließlich aus Zinserträgen, während die Rendite der ersteren sich aus Zinserträgen und Kapitalgewinnen/Verlusten zusammensetzt. Unter der An-

nahme, daß die Rendite beider Geldanlagen den gleichen Gesamtertrag erbringt - mathematisch bedeutet das Gleichheit der Barwerte aller möglichen Geldanlagen - ist es notwendig, auf den Kurs als Regulativ für eine unangemessene Höhe des Couponsatzes im Verhältnis zum Effektivzinssatz einzugehen. Das geschieht in dieser Arbeit in den Abschnitten I,3 sowie in II,2 und II,3.

Im Hauptabschnitt I, der sich kritisch-analytisch mit den Grundbegriffen und Grundgrößen der Zinsstruktur befaßt, wird versucht, vor allem den Fälligkeitsbegriff im Hinblick auf die verschiedenen Wertpapierarten (Abschnitt I,1 und I,2) sowie den wichtigen Unterschied zwischen "Wert"- und "Preis"-Begriff bei Wertpapieren (Abschnitt I,3) herauszuarbeiten.

Im Abschnitt I,4 wird dann auf den Begriff des "Terminzinssatzes", insbesondere auf die mathematische Herleitung bei Wallace eingegangen, wobei vor allem die prinzipielle Übereinstimmung dieser Gleichung mit der Kursgleichung (Abschnitt I,4 bzw. II,1) nachgewiesen wird. Die Begriffe "kurz"- bzw. "langfristiger" Zinssatz werden in den Abschnitten I,4 und I,5, der Begriff der Laufzeitstruktur der Effektivzinssätze und deren graphische Darstellung in den verschiedenen Ertragskurven in Abschnitt I,6 behandelt.

Wichtig für die begriffliche Abgrenzung und die mathematische Verknüpfung der im Hauptabschnitt I entwickelten Grundbegriffe ist die im Hauptabschnitt II betrachtete Abhängigkeit der Grundgrößen der Zinsstruktur (insbesondere von Couponsatz, Kurs und Effektivzinssatz) voneinander, die auf der Grundlage der Kurs- (Preis-)Formel (Abschnitt II,1) gründlich und im einzelnen (II,3, II,4 und II,5) untersucht werden.

Dabei zeigt sich, daß der Effektivzinssatz nicht nur dann einem bestimmten Grenzwert (Konsolzinssatz) zustrebt, wenn man die Laufzeit über alle Grenzen wachsen läßt, sondern auch dann, wenn man bei konstanter Laufzeit den Couponsatz gegen ∞ gehen läßt. Die Annäherung an die Grenzwerte erfolgt zwar in beiden Fällen asymptotisch, jedoch besteht ein wesentlicher Unterschied darin, daß sich die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Laufzeit in einer Exponentialfunktion ausdrückt, die Abhängigkeit des Couponsatzes vom Effektivzinssatz bei konstanter Laufzeit sich dagegen als gebrochen rationale Funktion darstellt (Abschnitt II,2, II,4 und II,5). Dabei treten - nicht nur bei den empirischen Ertragskurven - ganz bestimmte immer wiederkehrende, also typische Kurvenverläufe, auf (Abschnitt I,6), so daß man - abgesehen von der flachen, d.h. gradlinigen Ertragskurve - drei deutlich voneinander verschiedene Hauptkurventypen unterscheiden kann, nämlich

1. die steigenden Kurven mit asymptotischer Annäherung an den Grenzwert (Konsolkurs) von unten,
2. die monoton fallenden Kurven mit asymptotischer Annäherung an den Grenzwert von oben,
3. die Höckerkurven (humped curves), die den Grenzzinssatz nicht erst für $n=\infty$ annehmen, sondern schon vorher bei endlicher Laufzeit, und die daher (mindestens) ein Extremum und einen Wendepunkt aufweisen müssen. Dies zeigt sich auch bei den Ausgleichskurs- (und dementsprechend bei den Ausgleichs-Effektivzinssatz-) Kurven, die sich bei dem Normalintervall-Modell von Malkiel ergeben. Sie werden in Abschnitt VI,9, VI, 10 a-c eingehend untersucht, wobei auch auf die Bedingungen eingegangen wird (Höhe des Couponsatzes, Gewichtung der Randzinssätze usw.), die die Kurven der dritten Art verursachen.

Die Untersuchung der Abhängigkeit des Effektivzinssatzes

vom Couponsatz (Abschnitte II,4 und II,5) ist deshalb von besonderer Bedeutung, als man für den Effektivzinssatz besonders charakteristische Werte erhält, z.B. für den Fall, daß der Couponsatz den Wert Null annimmt, für den Fall, daß der Couponsatz gleich dem Effektivzinssatz wird (angepaßter Effektivzinssatz) und für den Fall, daß der Couponsatz über alle Grenzen wächst. Hervorzuheben ist die Tatsache, daß die Formel für die Berechnung des langfristigen Zinssatzes der klassischen Erwartungstheorie exakt nur Gültigkeit für den Fall hat, daß der Couponsatz den Wert Null hat.

Überraschend ist auch die geringe Breite des als "sinnvoll" bezeichneten Effektivzinssatzintervalls. Das Maß für diese Breite ist die Differenz der Effektivzinssätze, die zwischen den Rändern 0 und ∞ des Gesamtspektrums aller positiven Couponsätze liegen. Bei dem in der Arbeit häufig zitierten Beispiel von Lutz, d.h. beim Zinssatztripel 5%, 6%, 8%, beträgt die Länge des Grundintervalls der Einperiodenterminzinssätze 3%. Der unendlichen Intervallbreite des Couponsatzbereiches entspricht ein "sinnvolles" Effektivzinssatzintervall von etwa 1/2%.

Im Abschnitt II,6 (ihm entspricht der Abschnitt III,3) wird festgestellt, wie der Effektivzinssatz sich ändert, wenn die Einperiodenterminzinssätze umgestellt werden. Während der Kurs und über ihn auch der Effektivzinssatz - falls es sich um eine couponversehenes Wertpapier handelt, also der Couponsatz ungleich Null ist - in gesetzmäßiger Weise von der Aufeinanderfolge (Anordnung) der Einperiodenterminzinssätze abhängig ist, ist weder der langfristige Zinssatz der klassischen Erwartungstheorie, noch der aus dem arithmetischen (geometrischen, harmonischen) Mittel dieser Effektivzinssätze gebildete mittlere Effektivzinssatz von dieser Reihenfolge abhängig (Abschnitte III,3 und III,4).

Die überraschend gute Übereinstimmung des langfristigen Zinssatzes der klassischen Erwartungstheorie, der oft ungenau als geometrischer Mittelwert der kurzfristigen Zinssätze, vom Verfasser allerdings als "sogenannter" oder indirekter geometrischer Mittelwert bezeichnet wird (Abschnitt III,1), und dem mittleren Effektivzinssatz ist zweifellos auf die beiderseitige Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze zurückzuführen. Indessen ist völlige Gleichheit nicht zu erwarten, da der langfristige Zinssatz der klassischen Erwartungstheorie nicht nur von der Reihenfolge der gegebenen kurzfristigen Zinssätze, sondern auch vom Coupon-satz unabhängig ist, was aber für die Einzel-Effektivzinssätze nicht zutrifft. Bei n voneinander verschiedenen Einperiodenterminzinssätzen gibt es $n!$ Anordnungsmöglichkeiten und auch $n!$ Einzel-Effektivzinssätze (Abschn. II,6).

Die in der Literatur nicht immer klare Begriffsabgrenzung hinsichtlich des geometrischen Mittelwertes der kurzfristigen Zinssätze bzw. der ihnen zugeordneten Zinsfaktoren haben dazu Anlaß gegeben, den Mittelwertbegriff und die verschiedenen Arten der Mittelwertbildung eingehender zu besprechen (Abschnitt III,1). Darüberhinaus spielt der direkte wie der indirekte (gewogene) harmonische Mittelwert bei dem im Abschnitt VI,7 vorgestellten wesentlich vereinfachten Bestimmungsverfahren der Ausgleichseffektivzinssätze, die zum Normalintervall-Modell von Malkiel gehören, eine Rolle.

Im Hauptabschnitt III werden dann - entsprechend den im Abschnitt II,6 aufgezeigten Möglichkeiten der Anordnung der Zinssätze einer gegebenen Zinssatzmenge - die verschiedenen Verwendungsmöglichkeiten der Mittelwertarten bei der exakten bzw. näherungsweise Bestimmung des mittleren Effektivzinssatzes (Abschnitt III,3) behandelt.

Im Hauptabschnitt IV werden neben den sogenannten exakten Verfahren für die Berechnung des Effektivzinssatzes aus den betreffenden Bestimmungsgleichungen eine Anzahl von Näherungsverfahren - insbesondere auf der Basis der linearen Interpolation - beschrieben, wobei die Güte der jeweils erreichten Annäherung an den Sollwert durch eine Verfahrensanalyse und eine Fehlerabschätzung getestet wird.

Im 2. Teil dieses Hauptabschnittes werden dann noch weitere Verfahren angegeben, die nicht auf dem Gedanken der linearen Interpolation beruhen, sondern auf der Tatsache, daß sich die Kursgleichung jeweils in eine den Couponsatz (die Laufzeit) enthaltende und in eine den Couponsatz (die Laufzeit) nicht enthaltende Komponente zerlegen läßt, wobei zwischen diesen Komponenten und dem zu bestimmenden Effektivzinssatz einfache funktionale Beziehungen bestehen.

Die historische Weiterentwicklung des Zinstruktur-Modelles der klassischen Erwartungstheorie bis zum Normalintervall-Modell von Malkiel wird im Hauptabschnitt V behandelt. Hierbei wird insbesondere die von Faßbender gegebene Übersicht zugrundegelegt und zu Einzelpunkten kritisch Stellung genommen bzw. Verbesserungen vorgeschlagen (Abschnitt V, 2 b).

Auch im Abschnitt VI wird neben dem von Malkiel selbst benutzten Bestimmungsverfahren für den Effektivzinssatz vom Verfasser für bestimmte Laufzeiten ein stark vereinfachtes Verfahren eingeführt.

Im Abschnitt VI,6 wird die Kritik Faßbenders an Malkiel auf ihre Berechtigung hin untersucht und als z.T. unberechtigt zurückgewiesen. In diesem Zusammenhang bleibt festzustellen, daß Faßbender bei der von Malkiel benutzten Formel für die Halbjahresverzinsung irrtümlich eine Formel benutzt, die zwar halbjährliche Couponzahlungen vorsieht aber keine Halbjahres-Zinsperioden.

I. Grundbegriffe und Grundgrößen der Zinsstruktur

1. Arten der Verzinsung und Tilgung

Bei den Zinsvereinbarungen in Kreditverträgen spielt nicht nur die nominale Zinshöhe, sondern auch die Länge der einzelnen Zinsperioden (tägliche, wöchentliche, monatliche oder größere Bruchteile eines ganzen Jahres) eine Rolle. Außerdem ist es wichtig zu wissen, ob und mit welchem Zinssatz (vertraglich festgelegter oder Marktzinssatz z.B.) die fälligen Zinsen bei der Zinseszinsberechnung weiterverzinst werden.

Darüberhinaus ist die Tilgungsart von Bedeutung. Für die in dieser Arbeit zu behandelnden Kredite, nämlich die Gruppe festverzinslicher Wertpapiere, ist die vorzeitige, d.h. vor Erreichung des Verfallszeitpunkts erfolgende Rückzahlung (i.a. Rückzahlung zum Nominalwert ohne Zu- oder Abschläge) nur indirekt von Bedeutung, nämlich insofern als eine nicht angepaßte Nominalverzinsung (zu hoher oder zu niedriger Couponsatz im Vergleich zum Effektivzinssatz ¹⁾), soweit sie nicht durch den Kurs (Unter- oder Überparikurs) ausgeglichen wird, als positive oder negative, indirekte Tilgung aufgefaßt werden kann.

Die Erklärungshypothesen der Zinsstrukturtheorie gehen i.a. vom Modell einer gesamtfälligen Anleihe aus, einem Anleihemodell, das die Zinsvereinbarung für Kredite verschiedener Art (z.B. in Form von Darlehen, Lieferantenkrediten, Wechseln, Obligationen usw.) - gestaffelt nach der Laufzeit - durch Couponzahlungen entsprechender Anleihen dieses Typs zum Ausdruck bringt. Dabei wird allerdings nicht von einem gesamtfälligen Anleihetyp mit über die ganze Laufzeit konstanten Couponbeträgen ausgegangen, sondern vielmehr auf gesamtfällige Anleihen mit ver-

1) Vgl. S. 88 der Arbeit

änderlichen Couponzahlungen zurückgegriffen.¹⁾

Darauf wird im Schrifttum nicht näher eingegangen. Man kann sich eine solche Anleihe so vorstellen, daß die unterschiedlichen Couponzahlungen - entsprechend der Laufzeit der Anleihe - entweder von vornherein durch Konvertierung von Zinsperiode zu Zinsperiode vertraglich festgelegt oder aber von Fall zu Fall im Sinne einer Anpassung an die gegebenen Zinskonditionen vereinbart werden.

Anzumerken ist, daß dieses Anleihemodell der Realität nicht entspricht. "Die Rückzahlung der fälligen Kapitalien in einer Summe ist charakteristisch für Wechsel, 'Pfandkredit' und Genossenschaftsanteil. Im allgemeinen handelt es sich hierbei um relativ kleine und/oder kurzfristige Beträge. Bei Kapitalien über größere Summen und längere Fristen würde die 'einmalige' Tilgung dem Kapitalnehmer hohe Liquiditätskosten zumuten, da die betreffenden Tilgungsbeträge angesammelt und in relativ liquider Form unterhalten werden müssen."²⁾ Diese Tilgungsart - mit der Tilgungsrate 0 - wird in der Finanzmathematik mit der Raten- bzw. Annuitätentilgung verglichen.³⁾

-
- 1) Meiselman, D., The Term Structure of Interest Rates, Englewood Cliffs, N.J., 1962, S. 1:
"The present market value of a default-free stream of payments, one that is expected to be received with certainty, is given by the familiar formula:

$$S = \frac{P_1}{(1+R_1)} + \frac{P_2}{(1+R_2)^2} + \dots + \frac{P_n}{(1+R_n)^n}$$

where $P_1, P_2, \dots, P_n$ are payments in nominal dollars to be made at the ends of periods 1, 2, ..., n, and where $R_1, R_2, \dots, R_n$ are the rates of interest applicable to each payment expressed as a per cent per period."

- 2) Hahn, O., Finanzwirtschaft, Studienbibliothek - Betriebswirtschaft - Hrsg. R. Wittgen, München 1975, S. 178
3) Vgl. Nicolas, M., Finanzmathematik, Sammlung Götschen, Bd. 1183/1183a, Berlin 1967, S. 129 ff.

"Für langfristige Darlehen und Obligationen ist die Vereinbarung der halbjährlichen Ratentilgung - regelmäßig nach einigen tilgungsfreien Jahren - charakteristisch, die zusammen mit den Zinszahlungen erfolgt. Die einfache Ratentilgung (gleichbleibende Tilgungsbeträge und mit zunehmender Tilgung fallende Zinsbeträge, also insgesamt fallenden Halbjahres-Kapitaldienstleistungen = Annuitäten) ist dabei weitgehend durch die Annuitätentilgung (während der gesamten Laufzeit gleichbleibende Kapitaldienstleistungen-Annuitäten, also mit zunehmender Tilgung steigende, um die ersparten Zinsen erhöhte Tilgungen bei fallenden Zinsbeträgen) ersetzt worden."¹⁾

Wenngleich die Erklärungshypothesen von einem gesamtfälligen Anleihetyp ausgehen, erscheint es zweckmäßig, dann den Begriff der Gesamtfälligkeit nochmals zu unterteilen, und zwar in eine Gesamtfälligkeit i.w.S. und eine Gesamtfälligkeit i.e.S.

Versteht man unter Gesamtfälligkeit i.w.S. Schuldtilgung ohne zwischenzeitliche Tilgungsbeträge, aber mit zwischenzeitlicher Zahlung von Zinsen, so soll unter Gesamtfälligkeit i.e.S. eine Schuldtilgung einschließlich der Zahlung aller Zinsen (Zinseszinsen) zum Fälligkeitszeitpunkt (also ohne irgendeine zwischenzeitliche Zahlung) verstanden werden.

Bei einem couponfreien Wertpapier ²⁾ liegt immer die letztere Fälligkeitsart vor.

Der Fall der couponversehenen Wertpapiere schließt natürlich eine Gesamtfälligkeit i.e.S. aus. Im allgemeinen wird hier sogar im Couponsatz, wenn er nicht dem Effektivzinssatz angepaßt ist, eine - wenn auch schwache - positive bzw. negative Tilgungsrate enthalten sein. Etwaige Zins-

1) Hahn, O., Finanzwirtschaft, a.a.O., S. 178

2) Vgl. Abschnitt "Couponfreie und Couponversehene Wertpapiere", S. 4

differenzen zwischen dem Couponzinssatz (Nominalzinssatz) im Sinne eines "Zinsvorschusses" und dem wirklichen (effektiven) Zinssatz können mathematisch nur mittels negativer bzw. positiver Kursdifferenzen zum Parikurs, also durch entsprechende Kapitalverluste bzw. Kapitalgewinne ausgeglichen werden. Im allgemeinen ist der am Fälligkeitstag zurückzuzahlende Schuldbetrag identisch mit dem Nominalwert (1 bzw. 100), wenn nicht besondere Ab- oder Zuschläge vom bzw. zum Nominalwert von vornherein vereinbart worden sind.

2. "Couponfreie" und "Couponversehene" Wertpapiere

Die Darstellung der Zinsstruktur anhand des Modelles einer "gesamtfälligen Anleihe" mit gleichbleibenden oder in der Höhe veränderlichen Couponzahlungen, wobei die Couponzahlungen die Zinszahlungen über Kapitalüberlassungen in jeglicher Form (verbrieft oder unverbrieft), geordnet nach Laufzeiten, repräsentieren, läßt es zweckmäßig erscheinen, neben Anleihen mit Raten- bzw. Annuitätentilgung vor allem den Anleihetyp zu untersuchen, der keine Zahlung zwischenzeitlicher Tilgungsbeträge vorsieht. Das macht es möglich, auch die Zinszahlungen für Darlehensverträge in einem einheitlichen Anleihemodell mit unverändertlichem Kurswert zu erfassen. Deshalb soll im folgenden zwischen sog. "couponfreien" und "couponversehenen" Wertpapieren unterschieden werden.

Die couponfreien Wertpapiere kann man auch als einen Spezialfall der couponversehenen Wertpapiere auffassen, nämlich als couponversehene Wertpapiere mit dem Coupon-satz $r_0 = 0$.

Aus diesem Grunde läßt sich der Effektivzinssatz r_e bei couponfreien Wertpapieren verhältnismäßig einfach berechnen, da bei der Kursberechnung nur der Rückzahlungsbetrag am Ende der Laufzeit, also - falls keine Zu- oder Abschläge zum Kurswert vertraglich vereinbart worden sind - der Nennwert zu diskontieren ist; und zwar stimmt der

r_e -Wert in diesem Falle mit dem langfristigen Zinssatz R_n bzw. $R^{(n)}$ der klassischen Erwartungstheorie genau überein.¹⁾ Bei couponfreien Wertpapieren gilt also

$$r_e = R^{(n)}$$

mit

$$R^{(n)} = n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)} - 1,$$

wobei r_i die Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge r_i ($i = 1, \dots, n$), also die Einperiodenterminzinssätze, sind.

Der nachfolgende Beweis für diese Tatsache wird allgemein geführt, d.h. er geht von couponversehenen Wertpapieren aus. Die Beschränkung auf couponfreie Wertpapiere, also die Spezialisierung des Couponsatzes r_o auf den Wert 0, ergibt sich erst am Schluß dieses Abschnittes.

Der mathematische Zusammenhang zwischen dem Preis (Kurs) eines couponversehenen Wertpapiere und dem gegebenen Couponsatz (Nominalzinssatz r_o) sowie den ebenfalls als gegeben angenommenen Einperiodenterminzinssätzen r_i ($i = 1, \dots, n$) - entweder im Sinne "vollständiger Voraussicht" oder im Sinne "sicherer Erwartungen" - wird durch die Kursgleichung

$$r_o P_o^{(n)} = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)} + \frac{r_o}{(1+r_1)} + \frac{r_o}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{r_o}{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)}$$

ausgedrückt, wo $r_o P_o^{(n)}$ ²⁾ für P , 1 für F , r_o für C und r_i für $t+i-1 r_1$ ²⁾ gesetzt worden ist.

1) Vgl. S. 76 der Arbeit

2) Vgl. Malkiel, B.G., Princeton 1966, S. 43 (Formel 2A.3) und auch Nicolas, M., Finanzmathematik, a.a.O., S. 126

Bei der Aufstellung dieser Kursgleichung (Gleichung für den Anfangskurs $r_o p_o^{(n)}$) wird von der Annahme ausgegangen, daß gleiche ¹⁾ Couponbeträge r_o in gleichen zeitlichen Abständen gezahlt werden, und zwar jeweils am Ende einer Zinsperiode. Die Couponzahlungen sind dabei als Zinsabschlagszahlung für den eingeräumten Kredit (in Höhe von 1 bzw. 100 Geldeinheiten) anzusehen.

Definiert man nun den Effektivzinssatz r ($= r_e^{(n)}$) so, daß durch ihn als unveränderlichen "Ersatzzinssatz" für die Zinssatzfolge r_i ($i = 1, \dots, n$) die gezahlten Beträge (Nennbetrag und die einzelnen Couponbeträge) auf den gleichen Gegenwartswert $r_o \overline{p_o^{(n)}} = r_o p_o^{(n)}$ ²⁾ abdiskontiert werden, so ergibt sich

$$r_o \overline{p_o^{(n)}} = \frac{1}{(1+r)^n} + \frac{r_o}{(1+r)} + \frac{r_o}{(1+r)^2} + \dots + \frac{r_o}{(1+r)^n} = r_o p_o^{(n)}.$$

Diese (Ab-)Diskontierung auf $\overline{p_o^{(n)}}$ mit Hilfe des (einheitlichen) Effektivzinssatzes r ($= r_e^{(n)}$) ist also in der Zinswirkung identisch mit der (Ab-)Diskontierung des Nennwertes und der einzelnen Couponbeträge mit den für die jeweiligen Zinsperioden gültigen verschiedenen Zinsfaktoren $(1 + r_i)$ ($i = 1, \dots, n$).

Die Gleichsetzung von $p_o^{(n)}$ und $\overline{p_o^{(n)}}$ liefert, wenn man alle Glieder im Ausdruck $\overline{p_o^{(n)}}$ auf den Hauptnenner $(1 + r)^n$ und alle Glieder im Ausdruck $p_o^{(n)}$ auf den Hauptnenner

$$\prod_{i=1}^n (1+r_i) = (1+r_1)(1+r_2) \dots (1+r_n)$$

-
- 1) Bei nicht gleichen Couponbeträgen müßten an die Stelle der r_o -Werte des 2., 3. usw. Bruches der Kursformel jeweils unterschiedliche Couponbeträge treten.
 - 2) Der Index 0 steht für den Zeitpunkt $t = t+0$, auf den sich die Diskontierung bezieht, $p_o^{(n)}$ ist also der Emissionskurs.

erweitert, die Gleichung

$$1 + r_0 \left[\frac{1 + (1+r_n) + (1+r_n)(1+r_{n-1}) + \dots + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \cdot (1+r_2)}{\prod_{i=1}^n (1+r_i)} \right]^{1)} \\ = \frac{1 + r_0 \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1}}{(1+r)^n} = \frac{1 + r_0 [(1+r)^n - 1] : r}{(1+r)^n}$$

Durch die Gleichsetzung von $r_0 p_0^{(n)}$ mit $\overline{r_0 p_0^{(n)}}$, d.h. durch Elimination des Kurses, entsteht aus der Kursgleichung - wie man sieht - eine Gleichung für den Effektivzinssatz $r = r_e^{(n)}$ in Abhängigkeit von der Zinssatzfolge r_i ($i = 1, \dots, n$) und vom Couponsatz r_0 .

Man erkennt sogleich, daß für couponfreie Wertpapiere, bei denen $r_0 = 0$ ist, d.h. wenn zwischenzeitlich keine Zinsbeträge in Form von Couponbeträgen gezahlt werden, die ~~letzte~~ Gleichung in die sehr einfache Form

$$\frac{1}{(1+r)^n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+r_i)}$$

übergeht, was offenbar, wenn man $r (= r_e^{(n)})$ durch $R^{(n)}$ ersetzt, identisch ist mit der bekannten Beziehung der klassischen Erwartungstheorie für den langfristigen Zinssatz $R^{(n)}$ der (Gesamt-)Laufzeit n

$$R^{(n)} = n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)} - 1$$

- 1) Der Zinssatz r_1 tritt nur im Nenner (Diskontierungsnenner) der linken Seite dieser Gleichung, nicht aber im Zähler auf, da bei nachschüssiger Couponzahlung der Zinssatz r_1 auf die Verzinsung der ersten Couponzahlung, die erst am Ende dieser Zinsperiode geleistet wird, keinen Einfluß hat.
- 2) Nach der Bezeichnungsweise des Verfassers wird die Laufzeit grundsätzlich als oberer in Klammern gesetzter Index geschrieben. $R_n^{(n)}$ (langfristiger Zinssatz der klassischen Erwartungstheorie) bei Lutz und Malkiel ist also mit dem $R^{(n)}$ identisch.

3. "Wert"-Begriff und "Preis"-(Kurs-)Begriff bei
Wertpapieren

Bei Wertpapieren gleich welcher Art erscheint es wichtig, den Begriff "Wert" z.B. Gegenwartswert (auch Bar- oder Anfangswert genannt) oder Endwert (Endwert = Gesamtwert aller gezahlten Beträge, also Nennbetrag und verzinste Couponbeträge bezogen auf den Fälligkeitszeitpunkt) einerseits und den Begriff "Preis" (Preis = Kurs) z.B. Anfangs (auch Emissions-)Kurs oder Endkurs (Endkurs = Nennwert) genau zu unterscheiden.

In der Schreibweise des vorhergehenden Abschnittes würde der Anfangskurs durch das Symbol $p_0^{(n)}$ ¹⁾, der Endkurs durch das Symbol $p_n^{(n)}$ ²⁾ wiederzugeben sein.

Der durch die Konditionen des Wertpapieres wie

Nominalzinssatz (= Couponsatz)

Nennwert (Rückzahlungswert zum Fälligkeitszeitpunkt)
und Laufzeit ³⁾

festgelegte (Momentan)-"Wert" darf also nicht mit dem jeweiligen (Momentan)-"Preis", d.h. dem Kurs des betreffenden Wertpapieres zum betrachteten Zeitpunkt, verwechselt werden.

Der Hauptunterschied zwischen beiden Begriffen besteht im Zeitbezug, d.h. in der Berücksichtigung verschieden langer (Lauf-)Zeiten bei der Berechnung der Momentan-
größen.

Der Momentanwert $w_i^{(n)}$ = Wert zum Zeitpunkt $t+i$ ⁴⁾ geht stets vom Gesamtwert $w_n^{(n)}$ = Wert zum Zeitpunkt $t+n$ aus, also vom Wert aller während der gesamten Laufzeit ge-

1) 2) Der untere (rechte) Index im Kurssymbol $p_i^{(n)}$ ($i=0, \dots, n$) gibt den Bezugszeitpunkt in der absoluten i Zeitskala, also den Zeitpunkt $t+i$, an. Das n -te Jahr beginnt zum Zeitpunkt $t+n-1$ und endet zum Zeitpunkt $t+n$.

3) abgesehen von den Zinssätzen r_i ($i=1, \dots, n$) der gegebenen Zinssatzfolge

4) Der Zeitpunkt $t+i$ bedeutet das Ende des i -ten Jahres (nach $t=0$)

tätigten Zahlungen, die auf einen bestimmten Zeitpunkt (Moment $t+i$) (ab-)diskontiert werden, d.h. es wird für i i.a. nur die Beziehung $i < n$ (Abzinsung nicht Aufzinsung) sinnvoll sein.

Beim Begriff des Momentanpreises oder -kurses $p_i^{(n)}$ spielen nur die in Zukunft noch zu zahlenden, auf den augenblicklichen Zeitpunkt $(t+i)$ diskontierten Beträge (Nennbetrag und die ausstehenden Couponbeträge) eine Rolle und nicht die bereits vor dem Bezugszeitpunkt ausgezahlten Beträge.¹⁾

Da für den Emissionszeitpunkt die Begriffe Laufzeit und Restlaufzeit zusammenfallen, fallen mithin für diesen Zeitpunkt ($t = t+0$) auch die Begriffe (Anfangs-)Wert $w_0^{(n)}$ und (Anfangs-)Kurs $p_0^{(n)}$ zusammen ($p_0^{(n)} = w_0^{(n)}$).

Der Endkurs $p_n^{(n)}$ eines Wertpapiers ist (wenn für die Rückzahlung des Nennbetrages am Fälligkeitstag keine Zu- oder Abschläge vertraglich vereinbart worden sind) mit dem Nennbetrag (100 bzw. 1) identisch, wobei man sich vorstellt, daß die letzte Couponzahlung, die praktisch bei "nachsüssiger" Zahlung mit der Rückzahlung des Nennbetrages (Endbetrages) zusammenfällt, unmittelbar vor (und nicht genau gleichzeitig mit) dem Nennbetrag fällig wird.

Im Gegensatz zum Endkurs ($p_n^{(n)}$) ist der Endwert $w_n^{(n)}$, d.h. der auf das Ende der Laufzeit bezogenen Gesamtwert, der größte Momentanwert, den das Wertpapiere während seiner Laufzeit erreichen kann.

1) Für die Höhe des (Momentan-)Kurses $p_i^{(n)}$ ist also nicht wie für den (Momentan-)Wert $w_i^{(n)}$ die (Gesamt-) Laufzeit n , sondern nur die Restlaufzeit mit den in dieser Zeit geltenden Terminzinssätzen r_j ($j=(n-i+1)$ bis n) maßgebend.

Zur Veranschaulichung bzw. Verdeutlichung des Unterschiedes zwischen dem "Wert"- und "Preis"-Begriff kann das von Lutz angegebene Beispiel dienen:

"Sind z.B. die kurzfristigen Sätze $r_1 = 5\%$, $r_2 = 6\%$, $r_3 = 8\%$, dann wird der Kurs eines sog. 5%igen Wertpapiers mit einem Nominalwert von 100, einlösbar nach 3 Jahren, auf 96,6 stehen, so dass der Kapitalgewinn von 3,4 plus Couponzahlungen von 5 pro Jahr einen Effektivzins ergeben, der der Rendite aus den drei aufeinanderfolgenden kurzfristigen Sätzen entspricht."¹⁾

Der Endwert ${}_3W^{(3)}$ eines Wertpapiers mit einem Couponsatz von $r_0 = 5\%$ errechnet sich am Ende des 3. Jahres, d.h. zum Zeitpunkt $t+3$ bei Verwendung der Einperiodenterminzinssätze r_i ($i = 1, 2, 3$), nämlich $r_1 = 0,05$, $r_2 = 0,06$ und $r_3 = 0,08$ zu

$${}_3W^{(3)} = 100 + 5 \cdot (1) + 5 \cdot 1,08 + 5 \cdot 1,08 \cdot 1,06$$

wird	1 Jahr lang	verzinster
erst am	verzinster	Couponbetrag,
Ende des	vorletzter	gezahlt am
3. Jahres	Couponbetrag	Ende des 1.
gezahlt		Jahres

$${}_3W^{(3)} = 100 + 5 (1 + 1,08 + 1,08 \cdot 1,06)$$

$$= 100 + 5 \cdot 3,2248 = \underline{\underline{116,124.}}$$

Der Gegenwartswert (Barwert ${}_0W^{(3)}$) stimmt - wie bereits betont wurde - mit dem Anfangskurs ${}_0P^{(3)}$ überein.

$${}_0W^{(3)} = {}_0P^{(3)} = \frac{5}{1,05} + \frac{5}{1,05 \cdot 1,06} + \frac{5 + 100}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08}$$

$$= \frac{100 + 5 (1 + 1,08 + 1,08 \cdot 1,06)}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08}$$

$$= \frac{100 + 5 \cdot 3,2248}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08}$$

$$= \frac{116,124}{1,20204} = 96,60577 \approx 96,6^{(2)}$$

1) Lutz, F.A., Zinstheorie, Tübingen 1967, S. 183

2) Der von Lutz angegebene Kapitalgewinn von 3,40 ergibt sich aus dieser Gleichung.

Der Endwert ${}_5W_3^{(3)}$ unterscheidet sich vom Anfangswert ${}_5W_0^{(3)}$ dadurch, daß der Diskontierungsnenner (1,05.1,06.1,08) bei der Errechnung des Endwertes fortfällt.

Es ergeben sich folgende einfache Beziehungen zwischen Momentankurs $P_i^{(n)}$ und Momentanwert $W_i^{(n)}$ von couponverschienen Wertpapieren, d.h. Wertpapieren mit zwischenzeitlich zahlbaren Couponbeträgen.

$P_i^{(n)}$ ist gleich $W_i^{(n)}$ minus den bis $t+i$ gezahlten (verzinsten) Couponbeträgen.

Bezeichnet man die Momentanwerte bzw. Momentankurse - wie bereits geschehen - mit ${}_jW_i^{(n)}$ bzw. mit ${}_jP_i^{(n)}$, dann gilt¹⁾:

$$\begin{aligned} {}_0P_0^{(n)} &= {}_0W_0^{(n)} \\ {}_0P_1^{(n)} &= {}_0W_1^{(n)} - r_0 \\ {}_0P_2^{(n)} &= {}_0W_2^{(n)} - r_0 \left[1 + (1+r_1) \right] \text{ usw.} \end{aligned}$$

Nach dem vorgenannten Beispiel von Lutz mit

$$\begin{aligned} r_0 &= 0,05 \quad (= 5\%) \\ &\quad \text{---} \\ r_1 &= 0,05 \quad (= 5\%) \\ r_2 &= 0,06 \quad (= 6\%) \\ r_3 &= 0,08 \quad (= 8\%) \end{aligned}$$

ergeben sich folgende Entsprechungen:

1) Der Zahlenwert "j" in Prozenten tritt bei Zahlenbeispielen an die Stelle von r_0 .

$${}_5P_0^{(3)}, {}_5P_1^{(3)}, {}_5P_2^{(3)}, {}_5P_3^{(3)} \quad \text{bzw.} \quad {}_5W_0^{(3)}, {}_5W_1^{(3)}, {}_5W_2^{(3)}, {}_5W_3^{(3)}$$

$$= 96,605767$$

(Anfangskurs)

$$= 96,43605$$

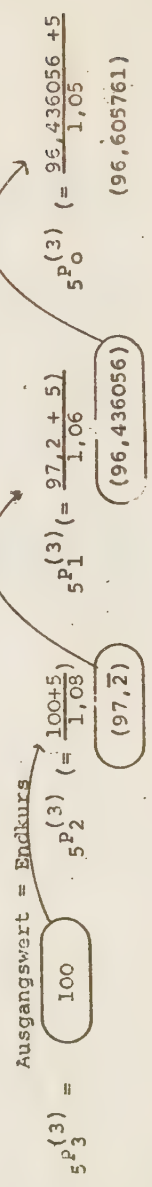
$${}_5P_0^{(3)} = \frac{5}{1,05} + \frac{5}{1,05 \cdot 1,06} + \frac{5}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,03} + \frac{100}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,03} = {}_5P_0^{(3)} = {}_5W_0^{(3)}$$

$${}_5P_1^{(3)} = \frac{5}{1,06} + \frac{5}{1,06 \cdot 1,03} + \frac{100}{1,06 \cdot 1,03} = {}_5P_1^{(3)} = {}_5W_1^{(3)} - 5$$

$${}_5P_2^{(3)} = \frac{5}{1,03} + \frac{100}{1,03} = {}_5P_2^{(3)} = {}_5W_2^{(3)} - 5(1 + 1,06)$$

$${}_5P_3^{(3)} = 100 = {}_5P_3^{(3)} = {}_5W_3^{(3)} - 5(1 + 1,03 + 1,03 \cdot 1,06) = 100$$

Bei der sukzessiven Errechnung der $P_i^{(3)}$ -Werte ($i=0; 1; 2; 3$) läßt sich ein vereinfachtes Verfahren verwenden, das rekursionsartig und ohne Unterbrechung der Rechnung die P_{i+1} -Werte aus den (zuvor ausgedruckten, aber nicht gelöschten) P_i -Werten bestimmt. Dieses vereinfachte Berechnungsverfahren der ${}_5P_i^{(3)}$ für $i = 0, 1, 2, 3$ (Berechnung mittels elektronischen Taschenrechners) läuft also wie folgt:



4. Der "kurzfristige" Zinssatz, Begriff des Terminzinssatzes

Eine einmalige Anlage von 1 DM im Zeitpunkt $t = t + 0$ mit n -jähriger Laufzeit, also bis zum Fälligkeitszeitpunkt $t + n$, wächst bei einem vertraglich für die genannte Zeit festgelegten Jahreszinssatz von R_n auf $(1 + R_n)^n$ an, wenn zwischenzeitlich keine Zinszahlungen erfolgen, d.h. Gesamtfälligkeit i.e.S. vorliegt. ¹⁾

Sollen alle Geldanlagen, die zum gleichen Zeitpunkt $t + n$ fällig werden, den gleichen Ertragssatz R_n besitzen, so ist diese Forderung nur erfüllbar, wenn der Ertragssatz R_n "unausgesprochen eine Anzahl zukünftiger kurzfristiger Zinssätze enthält" ²⁾, die bei einer ununterbrochen kurzfristigen Anlage von jeweils nur 1 Zinsperiode über n Jahre hinweg wirksam werden.

Die Formel, die den Zinsfaktor $(1 + R_n)$ als geometrisches Mittel der Zinsfaktoren $(1 + r_i)$ ($i = 1, \dots, n$) darstellt,

$$R^{(n)} = R_n \stackrel{\text{Def.}}{=} \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)} - 1 \quad 3)$$

oder abgekürzt

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)} - 1$$

kann in diesem Sinne als Definitionsgleichung für den langfristigen Zinssatz $R^{(n)}$ der "klassischen Erwartungstheorie" ⁴⁾ aufgefaßt werden. Anstelle des 1. Faktors $(1+r_1)$

1) Vgl. Abschnitt über "Arten der Verzinsung und Tilgung", S. 3

2) Meiselman, D., a.a.O., S. 4:

"The term structure of interest rates at any point in time contains an implicit set of forward ... interest rates".

3) R_n wird in dieser Arbeit, bei der die Laufzeit grundsätzlich durch einen oberen in Klammern gesetzten Index ausgedrückt werden soll, durch das Symbol $R^{(n)}$ gekennzeichnet, und zwar einheitlich für die Hauptabschnitte II bis V.

4) Vgl. S. 7 und S. 23 der Arbeit

in dem Radikanden der Wurzel kann auch $(1 + r_1)$ treten, weil für das laufende Jahr (Bezugszeitpunkt $t = t + 0$) der jeweilige Marktzins gleichzeitig als kürzester langfristiger und als erster kurzfristiger Einperiodenzinssatz betrachtet werden kann. ¹⁾

So umfaßt der Zinssatz R_n , aufgefaßt als effektiver Zinssatz eines couponfreien ²⁾ Wertpapiere mit n-jähriger Laufzeit, das gesamte Spektrum, oder anders ausgedrückt die ganze "Familie" ³⁾ der Einperiodenzinssätze r_i ($i = 1, \dots, n$), wie aus der obigen Definitionsgleichung für R_n hervorgeht. Denn einerseits wird der Wert von R_n mit Hilfe der kurzfristigen Zinssätze der Zinssatzfolge r_i ($i = 1, \dots, n$) durch das sogenannte Verfahren der geometrischen Mittelung ⁴⁾ der Zinsfaktoren $(1 + r_i)$ ($i = 1, \dots, n$) bestimmt; andererseits können auch umgekehrt die kurzfristigen Zinssätze r_i ($i = 1, \dots, n$) als sogenannte "Terminzinssätze" aus den im Augenblick $t = t + 0$ bestehenden langfristigen Zinssätzen R_j ($j = 1, \dots, n$), deren nach Laufzeit geordnete Folge man als Laufzeitstruktur der Zinssätze bezeichnet ⁵⁾, mit Hilfe der Formel

$$1 + r_i = \frac{(1 + R_i)^i}{(1 + R_{i-1})^{i-1}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

-
- 1) Der langfristige Zinssatz als konstituierendes Element der Laufzeitstruktur wird im folgenden Abschnitt behandelt, vgl. S. 22
 - 2) Vgl. den Abschnitt "Couponfreie und Couponversehene Wertpapiere", S. 4
 - 3) Vgl. Lutz, F.A., The Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 36
 - 4) Statt vom geometrischen Mittel der Zinsfaktoren wird in der Fachliteratur oft ungenau nur vom Mittel bzw. geometrischen Mittel der Zinssätze r_i ($i=1, \dots, n$) gesprochen. Vgl. z.B. Lutz, F.A., Zinstheorie, a.a.O., S. 184 und Claassen, E.M., Ein Beitrag zur Theorie der Zinsstruktur, a.a.O., S. 13
 - 5) Vgl. Lutz, F.A., Zinstheorie, a.a.O., S. 183, Meiselman, D., a.a.O., S. 5 und Malkiel, B.G., a.a.O., S. 22

bestimmt werden.

Die von Meiselman betonte rein rechnerische Bestimmbarkeit ¹⁾ der Zinsstruktur legt es nahe, den Terminzinssatz als Preis eines Termingeschäftes ²⁾ aufzufassen, den Kreditmarkt also wie einen Warenterminmarkt zu betrachten, eine Analogie, die nach Meiselman zuerst von Hicks ³⁾ bei der Diskussion der Zinssätze benutzt worden ist.

Nach Lutz muß es nämlich gemäß den Annahmen der klassischen Erwartungstheorie ⁴⁾ insbesondere unter der Annahme "vollständiger Voraussicht" ⁵⁾ "... dahin kommen, dass

-
- 1) Meiselman, D., The Term Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 4:
"This is not a statement of economic behavior. It is a tautology."
 - 2) Zum Begriff des Termingeschäftes vgl.
Hahn, O., Bankbetriebslehre, in: Schaeffers Grundriß des Rechts und der Wirtschaft, Hrsg. H.G. Schachtschabel, Bd. 85, Stuttgart und Düsseldorf 1967, S. 17 f. u. ders. Finanzwirtschaft, a.a.O., S. 157
 - 3) Vgl. Hicks, Value and Capital, 2. Aufl., London 1946, Kapitel 11-13, zitiert bei Meiselman, D., The Term Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 4
 - 4) Vgl. den Abschnitt "Langfristiger Zinssatz und Laufzeitstruktur", S. 22 der Arbeit
 - 5) Hahn, O., Geld- und Devisenhandel, Sammlung Poeschel, Reihe V, Hrsg. H. Seischab, Stuttgart 1954, S. 51:
"Die Arbitrage arbeitet mit bekannten Größen, deren Ermittlung allerdings entsprechendes Geschick voraussetzt. Die Spekulation bezieht demgegenüber die zukünftigen Erwartungen mit in die Überlegung ein. Sie zielt darauf ab, aus der künftigen Kursentwicklung Gewinne zu erzielen."
- Vgl. dazu auch die Unterscheidung zwischen Spekulation im weiteren bzw. engeren Sinne bei Steinmann, H., Theorie der Spekulation, Kieler Studien, Forschungsberichte des Instituts für Weltwirtschaft, Tübingen 1970, S. 3-4:
"Eine Spekulation im engeren Sinne liegt vor, wenn Güter, Devisen oder andere Objekte in der Absicht gekauft (verkauft) werden, sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder zu verkaufen (kaufen) und die Transaktion nur vorgenommen wird, weil man eine Preisänderung erwartet, nicht dagegen, weil man aus dem Besitz der Objekte einen Nutzen ziehen, sie bearbeiten oder in einen anderen Markt transferieren will."

alle Geldanlagen, die für die gleiche Dauer vorgenommen werden, den gleichen Ertrag abwerfen, ganz gleich, wie sie im einzelnen aussehen - z.B. eine kurzfristige Anlage mehrmals nacheinander oder eine einzige langfristige oder zuerst einige kurzfristige und für den Rest der Zeit eine längerfristige oder umgekehrt. Ist diese Bedingung gleichen Ertrags für alle denkbaren Konfigurationen von Geldanlagen für dieselbe Zeitspanne nicht erfüllt, dann bieten sich vorteilhafte Arbitragemöglichkeiten, deren Realisierung das Ergebnis gleicher Erträge erzeugt."¹⁾

Bei der Gewinnerzielung durch Ausnutzung intertemporaler Zinsdifferenzen kann man wie in der Literatur zum Geld- und Devisenhandel zwischen "Ausgleichsarbitrage" und "Differenzarbitrage" unterscheiden. Hahn beschreibt die beiden Arbitragearten folgendermaßen: "Die Arbitrage ist entweder Mittel zum Zweck oder Selbstzweck. Als Mittel zum Zweck ist sie anzusehen, wenn der Bank die Aufgabe gestellt ist, eine bestimmte Währung zu beschaffen oder zu verkaufen; sie wird bemüht sein, die betreffende Währung am Platze des niedrigsten Kurses zu kaufen bzw. am Orte des höchsten Kurses zu verkaufen. Hier liegt eine Ausgleichsarbitrage vor, die mit dem Devisenhandel als Dienstleistungsgeschäft oder als Risikoabsicherung eng verbunden ist. Dieser Arbitragetätigkeit fehlt der Charakter selbständiger Grundgeschäfte.

Zum Selbstzweck wird das Arbitrieren dann, wenn die Bank ohne zwingenden Grund versucht, an verschiedenen Plätzen Devisen zu kaufen und zu verkaufen, um lediglich an der Kursdifferenz zu verdienen. Man spricht dann von Differenzarbitrage."²⁾

1) Lutz, F.A., Zinstheorie, a.a.O., S. 183

2) Hahn, O., Geld- und Devisenhandel, a.a.O., S. 51

Hahn stellt bei seiner Unterscheidung des Arbitragebegriffes mehr auf den Zweck des Arbitrierens ab. Neldner kommt in Anlehnung an Schmidt zur gleichen Einteilung und betont die Art der Durchführung der Arbitrage: "Der Differenzarbitrageur schließt gleichzeitig zwei entgegengesetzte Geschäfte ab. Er kauft eine bestimmte Menge eines Gutes auf dem Teilmarkt mit dem niedrigeren Preis und verkauft die gleiche Menge dieses Gutes auf dem Teilmarkt mit dem höheren Preis. Der Ausgleichsarbitrageur vergleicht die Preise aller in Betracht kommenden Teilmärkte, um einen Kauf oder Verkauf auf dem Teilmarkt mit dem für ihn günstigsten Preis durchzuführen." ¹⁾

Da die Arbitrage bzw. die Termingeschäfte nicht Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit sind, kann darauf auch nur insoweit eingegangen werden, als sie zur Erläuterung der Erklärungshypothesen der Laufzeitstruktur dienen. Zur Veranschaulichung ihrer Wirkungsweise soll hier lediglich ein einfaches Beispiel einer Differenzarbitrage herangezogen werden. ²⁾

Will man sich einen bestimmten Zinssatz (i.S. vollständiger Voraussicht) für eine zukünftige Zinsperiode (bei einem Erwartungshorizont von zwei Perioden etwa die zweite) schon heute sichern, so kann man das erreichen, indem man etwa einen Zwei-Perioden-Kredit gibt und einen

-
- 1) Neldner, M., Die Kursbildung auf dem Devisenterminmarkt und die Devisenterminpolitik der Zentralbanken, in: Beiträge zur Geldlehre, Hrsg. R. Schilcher, Berlin 1970, S. 13 bzw. Schmidt, F., Internationaler Zahlungsverkehr und Wechselkurs - Der Zahlungsverkehr Bd. II, Leipzig 1922, S. 238 f.
 - 2) Vgl. Meiselman, D., The Term Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 6-7:
"Arbitrage between maturities can be illustrated by the following example. Assume simple interest and zero transaction costs. Also assume that the rate of inter-

Ein-Perioden-Kredit in gleicher Höhe aufnimmt oder ein Zwei-Perioden-Wertpapier (mit einem langfristigen Zinssatz R_2) kauft und gleichzeitig ein Ein-Perioden-Wertpapier (mit einem Zinssatz $R_1 = r_1$) verkauft, aus dessen Erlös man das Zwei-Perioden-Papier bezahlt.

Der Terminzinssatz r_2 für die zweite Zinsperiode ist dann

$$r_2 = \frac{(1 + R_2)^2}{(1 + R_1)} - 1.$$

Die Verknüpfung zukünftiger kurzfristiger Zinssätze untereinander über Anleihen verschiedener Laufzeiten, z.B. mit n bzw. $n+1$ Jahren, durch Transaktionen auf dem Kassa- bzw. Terminmarkt zeigt Wallace an dem Beispiel eines bestimmten Einperiodenzinssatzes r_k , den man daher als Einperiodenterminzinssatz bezeichnen kann. ¹⁾ Nach Wallace ist eine gesamtfällige ²⁾ Anleihe vollständig bestimmt, wenn Kurs, Couponsatz, Laufzeit und Nennwert gegeben sind. ³⁾ Der Kurs wird grundsätzlich mit 1 angenommen. Im Gegensatz zu fast allen Literaturbeiträgen zur Laufzeitstruktur ⁴⁾ bedeutet nach Wallace der Terminzinssatz r_k den z.Zt. t vertraglich für die zum

est on two-year loans, R_2 , is 5 per cent per year, and that the rate of interest on a one-year loan for this year, R_1 , is 12 per cent per year. This means that the forward rate on a one-year loan during year 2, r_2 , is minus 2 per cent. Arbitrage profits can be realized by simultaneously borrowing at the tow-year rate and lending at the one-year rate."

- 1) Vgl. Wallace, N., The Term Structure of Interest Rates and The Maturity Composition of The Federal Debt, Diss. Chicago. 1964, S. 4-6
- 2) Wallace meint hier nicht die Gesamtfälligkeit i.e.S., also ohne zwischenzeitliche Couponzahlungen, sondern die Gesamtfälligkeit i.w.S. Vgl. S. 3 der Arbeit
- 3) Wallace benutzt folgende Symbole: F=face value=Nennbetrag eines k-Periodenpapieres, c_k =Couponsatz eines k-Periodenpapieres, n=Laufzeit.

Zeitpunkt $t+k$ beginnende Periode festgelegten Zinssatz ($r_0 = r_{t+0}$, also den momentanen Marktzinssatz, der beinahe bei allen anderen Autoren mit r_1 bezeichnet wird). Statt der Bezeichnungsweise von Wallace für den Terminzinssatz r_1 (r_1 ist der Terminzinssatz der zweiten - von $t+1$ bis $t+2$ -laufenden Periode) lautet das entsprechende Symbol - mit Ausnahme von Malkiel - bei allen übrigen hier behandelten Autoren r_2 .

Die Transaktionen, die zur Festlegung des Terminzinssatzes r_1 getätigt werden müssen, sind:

Zeit	Transaktionen	Ausz. (-)	Einz. (+)	Netto
t	Aufnahme eines Ein-Perioden-Kredits Kauf eines - Zwei-Perioden-Papiers	1	1	0
$t+1$	Rückzahlung des Ein-Perioden-Kredits Empfang der Coupon- zahlung des Zwei- Perioden-Papiers	$1+r_0$	c_2	$-(1+r_0-c_2)$
$t+2$	Empfang der Couponzahlung Empfang des Nennwertes		c_2 F_2	$+(c_2 + F_2)$

Quelle: Wallace, N., The Term Structure of Interest Rates and The Maturity Composition of The Federal Debt, a.a.O., S. 6

Daraus errechnet sich r_1 , d.h. der zur Zeit t für die Zeit $t+1$ festgelegte Einperiodenterminzinssatz zu

$$1 + r_1 = \frac{c_2 + F_2}{(1+r_0)-c_2}.$$

Durch mathematische Überlegung¹⁾ findet Wallace den für den Terminzinssatz r_n vertraglich festgesetzten Zinssatz, der zur Zeit t für die zum Zeitpunkt $t+n$ beginnende Periode gilt

$$1 + r_n = \frac{c_{n+1} + F_{n+1}}{\prod_{j=0}^{n-1} (1 + r_j) - c_{n+1} G_n} \quad 2)$$

G_n ist eine Abkürzung für den Ausdruck

$$\begin{aligned} 1 + & \\ & (1 + r_{n-1}) \\ & + (1 + r_{n-1}) (1 + r_{n-2}) + \dots \\ & + (1 + r_{n-1}) (1 + r_{n-2}) \dots (1 + r_1) . \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Seiten der obigen Gleichung mit dem Nenner der rechten Seite und schafft das Glied mit dem Faktor c_{n+1} auf die rechte Seite, so steht auf der linken Seite das Produkt

$$\prod_{j=0}^n (1 + r_j),$$

also gerade der Gesamtertrag (Endwert) eines couponfreien $n+1$ -Perioden-Papieres (z.B. eines $n+1$ -Perioden-Darlehens oder eines für $n+1$ Perioden festgelegten Sparguthabens) mit von Periode zu Periode veränderlichen Zinssätzen (Terminzinssätzen), beginnend mit dem Marktzinssatz r_0 der ersten und endend mit dem durch die Wallace-Formel bestimmten $(n+1)$ ten Terminzinssatz r_n der letzten $(n+1)$ ten Periode.

Auf der rechten Seite steht dagegen der Endwert

-
- 1) Verfahren der vollständigen Induktion
 - 2) Wegen der von Wallace benutzten Indizierung der Terminzinssätze nach dem Beginn der Periode, für die sie gültig sind, statt nach ihrem Ende, beginnt der Laufindex j bei 0 und endet bei $n-1$, während er üblicherweise mit 1 beginnt und mit n endet.

(verzinsten Couponzahlungen + Nennwert) einer couponver-
sehenen $n+1$ Perioden-Obligation zum Pari-Emissionskurs.

Dividiert man nämlich die neue rechte Seite durch die
neue linke Seite $\prod_{j=0}^n (1 + r_j)$, so erhält man die bekannte
Form der Kursgleichung

$$1 = \frac{c_{n+1} \left[\frac{G_n (1 + r_n) + 1}{n} \right] + F_{n+1}}{\prod_{j=0}^n (1 + r_j)}$$

$$= \frac{F_{n+1} + c_{n+1} \cdot G_{n+1}}{\prod_{j=0}^n (1 + r_j)},$$

wo G_{n+1} für $(1 + r_n) \cdot G_n + 1$ steht. Wegen

$$G_n = 1 + (1+r_{n-1}) + \dots + (1+r_{n-1}) \dots (1+r_1) \quad 1)$$

gilt also für $(1+r_n) \cdot G_n + 1$ folgender Ausdruck

$$\left[(1+r_n) + (1+r_n)(1+r_{n-1}) + \dots + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots (1+r_1) \right] + 1.$$

Die rechte Seite der obigen Gleichung stellt nach der Aus-
drucksweise des Verfassers die (ungequerte) Kursgröße
 $p_O^{(n+1)}$ im Parifall dar, denn $p_O^{(n+1)}$ wird definiert
durch

$$1 + r_O \left[\frac{1 + (1+r_{n+1}) + (1+r_{n+1})(1+r_n) + \dots + (1+r_{n+1}) \dots (1+r_2)}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + r_i)} \right]$$

wobei folgende Entsprechungen zu beachten sind:

$$F_{n+1} = 1; c_{n+1} (= c_i, i=1, \dots) = r_O; r_{i+1} = r_i. \quad 2)$$

1) Vgl. die vorhergehende Seite

2) Vgl. den Abschnitt "Couponfreie und Couponversehene
Wertpapiere, S. 7

Langfristiger Zinssatz und Laufzeitstruktur

Die wesentliche Aussage der Erwartungstheorie steckt nach Faßbender in der Gleichung

$$r_{1,t+i,t} = e_{1,t+i,t} \quad i = 1, \dots, n,$$

d.h. in der Aussage: "Die klassische Erwartungstheorie interpretiert den von der Zinsstruktur in t für $t + i$ implizierten Einperiodenterminzins $r_{1,t+i,t}$ als den in t für $t + i$ erwarteten Einperiodenzins $e_{1,t+i,t}$."¹⁾

Die Bedingungen für die Gültigkeit der klassischen Erwartungstheorie faßt Faßbender in einem Katalog von Prämissen zusammen:

- (1) "Die Wirtschaftssubjekte haben subjektiv gewisse Erwartungen für die Zinssätze, die während ihrer Anlagedauer gelten werden.
- (2) Die Erwartungen aller Wirtschaftssubjekte sind identisch.
- (3) Die Wirtschaftssubjekte haben bei gleicher Rendite keine Präferenzen hinsichtlich der Restlaufzeit.
- (4) Der Kauf und Verkauf von Wertpapieren verursacht keine Kosten.
- (5) Die Wertpapieranleger, im folgenden auch Investoren genannt, handeln rational.
- (6) Die Anlagedauer stimmt mit der Restlaufzeit des längstfristigen Wertpapiers überein.

1) Faßbender, H., Zur Theorie und Empirie der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze, in: Schriften des Instituts für das Spar-, Giro- und Kreditwesen an der Universität Bonn, Hrsg. F. Voigt, Bd. 72, Berlin 1973, S. 23

- (7) Die Couponzahlungen werden zwischenzeitlich nicht ausgezahlt, sondern bis zur Fälligkeit angelegt.¹⁾²⁾

Nach der klassischen Erwartungstheorie besteht zwischen der Laufzeitstruktur, d.h. der Gesamtheit der langfristigen Zinssätze, gestaffelt nach der Restlaufzeit

$$tR_1, tR_2, tR_3 \dots tR_n \quad \text{einerseits}$$

und den Einperiodenterminzinssätzen

$$t+0r_1, t+1r_1, t+2r_1 \dots t+n-1r_1 \quad \text{andererseits}^3)$$

die folgende Beziehung

$$(1 + tR_n)^n = (1 + tR_1)(1 + t+1r_1) \dots (1 + t+n-1r_1). \quad 4)$$

R_n läßt sich also durch die n-te Wurzel aus dem Produkt der mit den kurzfristigen Einperiodenterminzinssätzen gebildeten Zinsfaktoren abzüglich der Einheit eindeutig ausdrücken

$$tR_n = \sqrt[n]{(1+tR_1)(1+t+1r_1) \dots (1+t+n-1r_1)} - 1, \quad 5)$$

weshalb R_n auch als "sogenannter"⁶⁾ geometrischer

-
- 1) Vgl. dazu den ausführlichen Katalog bei Paish, F.W., Long-Term and Short-Term Interest Rates in the United Kingdom, Manchester 1966, S. 1-18
- 2) Faßbender, H., a.a.O., S. 23
- 3) Die Bezeichnungsweisen von Malkiel (Malkiel, B.G., The Term Structure of Interest Rates) und Faßbender unterscheiden sich in der Indizierung des Bezugszeitpunktes $t+1$, der bei Faßbender als Zweitindex nachgeschrieben, bei Malkiel dagegen als praeskribierter Index geschrieben wird.
- 4) Vgl. die Abschnitte "Couponfreie und Couponversehene Wertpapiere" sowie insbesondere den Abschnitt über "Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Coupon-satz", wo die obige Formel als Sonderfall der Kursformel erscheint.
- 5) Der von anderen Verfassern schlechthin als geometrischer Mittelwert der Einperiodenterminzinssätze bezeichnete Wert wird vom Verfasser als "sogenannter" (indirekter) Mittelwert bezeichnet, weil hier in Wirklichkeit nicht die Einperiodenterminzinssätze selbst, sondern die zugehörigen Zinsfaktoren $(1 + t+1r_1)$ geometrisch gemittelt werden und anschließend die Einheit subtrahiert wird.
- 6) Vgl. Malkiel, B.G., a.a.O., S. 21

Mittelwert aus den Einperiodenterminzinssätzen ${}_{t+i}r_1$ ($i = 0, \dots, n-1$) bezeichnet wird.

Im folgenden wird vereinfacht für den "sogenannten" geometrischen Mittelwert der Ausdruck

$$r_g = R^{(n)} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)} - 1$$

verwendet, wo r_i für ${}_{t+i-1}r_1$ steht.

6. Laufzeitstruktur und Ertragskurvenverlauf

Für die unterschiedlichen Typen von Ertragskurven ¹⁾, deren Verlauf den Zinsertrag der Wertpapiere verschiedener Laufzeiten ²⁾ charakterisiert, hat Faßbender nach dem Vorgehen von Malkiel, der sich seinerseits dabei auf Durand bezieht ³⁾, folgende Zahlenbeispiele angegeben,

- 1) Ertragskurven stellen die jeweilige Laufzeitstruktur dar, wobei der langfristige Zinssatz ${}_iR_t$ ($i = 1, \dots, n$) $t = \text{konstant}$) als Ordinate zur Laufzeit i als Argument aufgetragen wird.
- 2) Als kurzfristig wird im allgemeinen in der Literatur ein Zeitraum von 1 Periode bezeichnet; langfristig wäre also schon ein Zeitraum, der 2 oder mehr Perioden umfaßt.

Da eine solche Differenzierung nur modellhaften Charakter hat, kann man, wenn man einen historischen Zeitablauf betrachtet, den beobachteten Zeitraum, der dem Anfang der Beobachtungszeit näher liegt, als kurzfristig und den Zeitraum, der sich dem Ende der Beobachtungszeit zuneigt, als langfristig und das Verhalten der Konsols asymptotisch widerspiegelnd, bezeichnen.

- 3) Vgl. Malkiel, B.G., a.a.O., S. 3, der wahrscheinlich aber angeregt wurde durch die Darstellung bei Lutz, F.A., The Structure of Interest Rates, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 55 (1940), S. 36-62, hier S. 58

"die die Aussage verdeutlichen, nach der die klassische Erwartungstheorie jeden denkbaren Ertragskurvenverlauf erklären kann." 1)

Sieht man von der sogenannten "flachen" Ertragskurve ab, d.h. von der Ertragskurve mit praktisch über die gesamte Laufzeit konstanten kurzfristigen (Erwartungs-) Zinssätzen, so unterscheidet Faßbender mit Malkiel außer der zunächst ansteigenden, dann asymptotisch abflachenden Ertragskurve auch den umgekehrten Typ (zunächst fallend, dann asymptotisch abflachend) sowie den von Malkiel als "humped curve" (aufgeworfene Ertragskurve oder auch Höcker-Kurve) bezeichneten Kurventyp. 2)

In den von Faßbender angegebenen Zahlenbeispielen für die typischen Ertragskurvenverläufe sind die langfristigen Zinssätze $R_{i,t}$ allerdings als arithmetische und nicht - was genauer ist - als (sogenannte) geometrische Mittelwerte 3) bestimmt worden.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Werten ist jedoch gering, wie sich aus der 4. Spalte, die den umseitig aufgeführten Tabellen 4) von Faßbender hinzugefügt wurde, ergibt:

1) Faßbender, H., a.a.O., S. 86-90, hier S. 86
Vgl. auch S.28 der Arbeit

2) Vgl. S. 36 der Arbeit

3) Dieser Begriff wird im Kapitel "Arten der Mittelwertbildung" eingehend besprochen.
Vgl. S.115 der Arbeit

4) Vgl., Faßbender, H., a.a.O., S. 87, Tabellen 1-AI-1 bis 1-AI-3

Tabelle 1-AI-1
Entstehung einer ansteigenden Ertragskurve

i	$e_{1,t+i-1,t}$ in %	$R_{i,t}$ in % arithm.M.	$R_{i,t}$ in % geomtr.M.
1	-	1,5	1,5
2	4,5	3,0	2,99
3	6,0	4,0	3,98
4	6,5	4,6	4,61
5	6,5	5,0	4,98
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	6,5	6,5	6,5

Tabelle 1-AI-2
Entstehung einer sinkenden Ertragskurve

i	$e_{1,t+i-1,t}$ in %	$R_{i,t}$ in % arithm.M.	$R_{i,t}$ in % geomtr.M.
1	-	9,0	9,00
2	5,0	7,0	6,98
3	4,0	6,0	5,98
4	4,0	5,5	5,48
5	4,0	5,2	5,18
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	4,0	4,0	4,0

Tabelle I-AI-3
Entstehung einer aufgeworfenen Ertragskurve

i	$e_{1,t+i-1,t}$ in %	$R_{i,t}$ in % arithm.M.	$R_{i,t}$ in % geomtr.M.
1	-	3,0	3,00
2	5,0	4,0	3,99
3	7,0	5,0	4,99
4	3,0	4,5	4,49
5	3,0	4,2	4,19
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	3,0	3,0	3,0

Die Zahlenwerte der 4. Spalte errechnen sich gemäß der klassischen Erwartungstheorie als geometrische Mittelwerte¹⁾ aus den gegebenen $e_{1,t+i,t}$ und dem gegebenen $R_{i,t}$ -Wert:

z.B. ergibt sich in Tabelle 1-AI-1

$$R_{4,t} \text{ (arithm.M.)} = (1,5+4,5+6+6,5) : 4 = 4,625\%$$

$$R_{4,t} \text{ (geometr.M.)} = \sqrt[4]{(1+\frac{1,5}{100})(1+\frac{4,5}{100})(1+\frac{6}{100})(1+\frac{6,5}{100})} - 1$$
$$= 0,0460668, \text{ d.h. } R_{4,t} = 4,606\%.$$

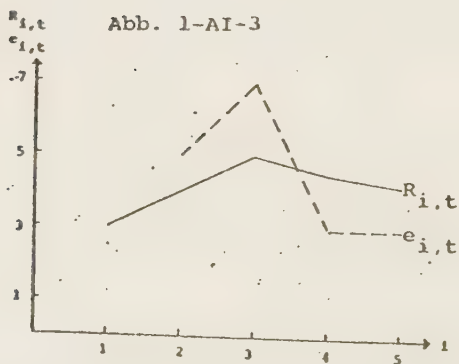
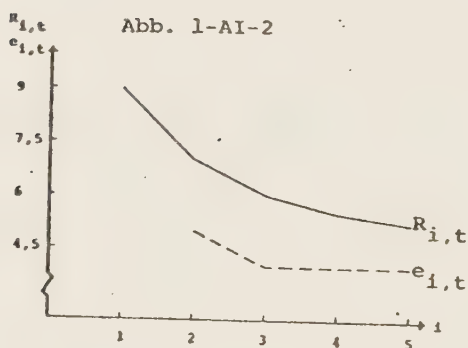
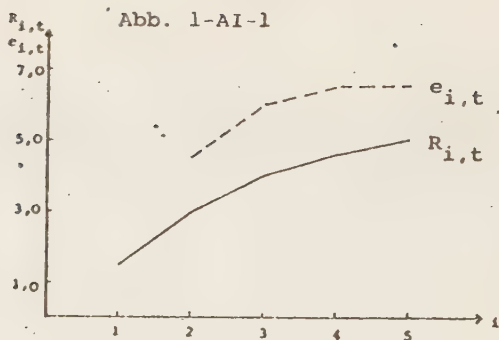
Aus den Erwartungswerten $e_{1,t+i,t}$, die sich in den jeweils 2. Spalten seiner Tabellen 1-AI-1, 1 AI-2, 1-AI-3 befinden, konstruiert Faßbender außer den zugehörigen Ertragskurven je eine zusätzliche "Kurve der erwarteten Zinssätze", und zwar trägt er die erwarteten Zinssätze $e_{i,t+i-1,t}$ an der Stelle i der Laufzeitachse auf.³⁾

Wie allgemein Mittelwerte (hier der geometrische Mittelwert) eine glättende Wirkung besitzen, so zeigt sich auch bei den zur Tabelle 1-AI-3 gehörenden zwei Kurven ("Ertragskurve" und "Kurve der erwarteten Zinssätze") dieser glättende Einfluß in einer wesentlich schwächeren Schwankung der Ertragskurve verglichen mit der Erwartungskurve.

Die Begründung für die Tatsache, daß die Kurve der Erwartungszinssätze zu den Tabellen 1-AI-1 bzw. 1-AI-2 durchgehend unterhalb der betreffenden Ertragskurve verläuft, entspricht der Begründung für das Verhalten

1)2) Richtiger muß es heißen "sogenannter" oder indirekter geometrischer Mittelwert; vgl. den Abschnitt "Arten der Mittelwertbildung", S. 115

3) S. folgende Seite



der beiden Kurven zu Tabelle 1-AI-3 (dämpfender Einfluß auf den zuletzt hinzukommenden, von den übrigen Faktoren in einer bestimmten Richtung abweichenden Faktor im Radikanden für den geometrischen Mittelwert durch die geometrische Mittelung).

Die Spalte 2 aus 1-AI-1 besteht aus einer monoton steigenden (gegen 6,5 konvergierenden) Folge

$$e_{1,t+i,t} \geq e_{1,t+i-1,t} \quad (i = 1, \dots, n)$$

von Erwartungszinssätzen, wobei man sich als Anfangsglied $e_{1,t+0,t}$ den Wert $e_{1,t+0,t} = R_{1,t}$ hinzudenken muß und für $i \geq 4$ das Gleichheitszeichen gilt.

Aus dieser Monotonie der $e_{1,t+i,t}$ -Werte ¹⁾ läßt sich mathematisch der typische ansteigende Verlauf der zugehörigen Ertragskurven ableiten. Insbesondere gelten unter der Annahme $e_{1,t+i,t} > e_{1,t+i-1,t}$ für die Funktionswerte $R_{i,t}$ für alle endlichen i -Werte ($i \geq 2$) die beiden folgenden Ungleichungen

$$(6.1/6.2) \quad (6.1) \quad R_{i,t} > R_{i-1,t} \quad (6.2) \quad R_{i,t} < e_{1,t+i-1,t}$$

(d.h. die $R_{i,t}$ bilden eine streng monoton steigende Zahlenfolge, während für $i = 1$ definitionsgemäß

$$R_{1,t} = e_{1,t+1-1,t} = e_{1,t+0,t} \text{ ist}).$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich folgendermaßen (vollständige Induktion) führen, da

$R_{i-1,t}$ für $i = 1$ keinen Sinn hat; und

$R_{i,t} < e_{1,t+i-1,t}$ für $i = 1$ noch nicht gilt (s.o.).

1) Die Monotonie der $e_{1,t+i,t}$ -Werte ist aber (s. S. 34 unten) nicht notwendig für die Monotonie der $R_{i,t}$ -Werte.

a) Für $i = 2$

lauten die behaupteten Ungleichungen (1) bzw. (2)

$$(6.1a/6.2a) \quad (6.1a) \quad R_{2,t} > R_{1,t} \quad \text{und} \quad (6.2a) \quad R_{2,t} < e_{1,t+1,t}$$

Aus

$$(1 + R_{2,t}) = \sqrt[2]{(1 + R_{1,t})(1 + e_{1,t+1,t})}$$

folgt durch Quadrieren beider Seiten

$$(6.3a) \quad (1 + R_{2,t})(1 + R_{2,t}) = (1 + R_{1,t})(1 + e_{1,t+1,t})$$

Addiert man zur 1. Ungleichung, die sich aus der monoton steigenden Folge der Erwartungszinssätze, also von

$$e_{1,t+0,t} (=R_{1,t}) < e_{1,t+1,t} < e_{1,t+2,t} \quad \text{usw.}$$

ergibt, also zu $R_{1,t} < e_{1,t+1,t}$ beiderseits die Zahl 1, so erhält man $1 + R_{1,t} < e_{1,t+1,t} + 1$, das sind die zwei

Faktoren der rechten Seite von 6.3a. Aus der Gleichheit der beiden Faktoren der linken und der Ungleichheit der Faktoren der rechten Seiten von Gleichung (6.3a) folgt dann sofort, daß

(6.11a/6.12a)

(6.11a)
einerseits

$$(1 + R_{2,t}) > R_{1,t}$$

(6.12a)
andererseits

$$(1 + R_{2,t}) < 1 + e_{1,t+1,t}$$

sein muß.

Durch Subtraktion der Einheit auf beiden Seiten der obigen Ungleichungen (6.11 bzw. 6.12) erhält man unmittelbar die Behauptung:

$$R_{2,t} < e_{1,t+1,t} \quad \text{bzw.} \quad R_{2,t} > R_{1,t}$$

b) Für $i = 3$

lauten die behaupteten Ungleichungen

$$(6.1b) \quad R_{3,t} > R_{2,t}$$

$$(6.2b) \quad R_{3,t} < e_{1,t+2,t}.$$

Entsprechend dem Vorgehen unter a) dient hier als Ausgangspunkt die Bestimmungsgleichung für $R_{3,t}$, nämlich

$$(1+R_{3,t})^3 = (1+R_{2,t})^2(1+e_{1,t+2,t}) \quad \text{oder}$$

$$(6.3b) \quad (1+R_{3,t})^3 = (1+R_{1,t})(1+e_{1,t+1,t})(1+e_{1,t+2,t}).$$

Aus (6.3b) ergibt sich mit der gleichen Begründung wie unter 6.3a(d.h. wegen der Gleichheit der Faktoren der linken Seite und der Ungleichheit der Faktoren der rechten Seite) für die wegen der vorausgesetzten Monotonie der Folge der Erwartungszinssätze wie unter a) folgt

$$R_{1,t} (=e_{1,t+0,t}) < e_{1,t+1,t} < e_{1,t+2,t} \quad \text{usw.}$$

und damit

$$(1 + R_{1,t}) < (1 + e_{1,t+1,t}) < (1 + e_{1,t+2,t})$$

daß $(1 + R_{3,t})$ kleiner sein muß als der größte Faktor der rechten Seite (und größer als der kleinste Faktor der rechten Seite).

Also ist

$$(1 + R_{3,t}) < (1 + e_{1,t+2,t})$$

oder

$$R_{3,t} < e_{1,t+2,t}.$$

Damit ist 6.2b bewiesen.

Der Beweis der Richtigkeit von 6.1b folgt aus 6.3b unter Benutzung von 6.2b unmittelbar, da

$$(1 + R_{3,t})^3 = (1 + R_{2,t})^2 (1 + e_{1,t+2,t})$$

mit

$$(1 + R_{3,t})^2 = (1 + R_{2,t})^2 (1 + e_{1,t+2,t}) : (1 + R_{3,t})$$

äquivalent ist und aus

$$1 + e_{1,t+2,t} > 1 + R_{3,t}$$

(unter der Voraussetzung, daß alle $R_{i,t}$ und alle Erwartungszinssätze positiv sind)

$$(1 + e_{1,t+2,t}) : (1 + R_{3,t}) > 1 \quad \text{folgt.}$$

Also ist

$$(1 + R_{3,t})^2 > (1 + R_{2,t})^2$$

und somit auch

$$(1 + R_{3,t}) > (1 + R_{2,t}).$$

Für den Schluß von n auf $n+1$ lautet die Induktionsvoraussetzung, daß folgende Ungleichungen als richtig nachgewiesen worden sind

$$R_{n,t} > R_{n-1,t} \quad \text{und} \quad R_{n,t} < e_{1,t+n-1,t}.$$

Die Induktionsbehauptung lautet

$$(6.1c/6.2c) \quad (6.1c) \quad R_{n+1,t} > R_{n,t} \quad \text{und} \quad (6.2c) \quad R_{n+1,t} < e_{1,t+n,t}$$

$$(6.2c) \quad \text{Die Bestimmungsgleichung für } R_{n+1,t} \text{ ist}$$

$$(6.3c) \quad (1 + R_{n+1,t})^{n+1} = (1 + R_{1,t})(1 + e_{1,t+1,t}) \dots (1 + e_{1,t+n,t}).$$

Aus

$$R_{1,t} (= e_{1,t+0,t}) < e_{1,t+1,t} \dots < e_{1,t+n,t}$$

folgt

$$(1 + R_{1,t}) < (1 + e_{1,t+1,t}) < \dots < (1 + e_{1,t+n,t}),$$

also muß

$$(1 + R_{n+1,t}),$$

da die linke Seite aus lauter gleichen Faktoren besteht, kleiner als der größte Faktor

$$1 + e_{1,t+n,t}$$

der rechten Seite sein, womit 6.2c bewiesen ist.

$$(1 + R_{n+1,t})^{n+1} = (1 + R_{n,t})^n (1 + e_{1,t+n,t})$$

ist äquivalent mit

$$(1 + R_{n+1,t})^n = (1 + R_{n,t})^n \left[(1 + e_{1,t+n,t}) : (1 + R_{n+1,t}) \right],$$

wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer wegen 6.2c größer als 1 ist, denn aus

$$(1 + R_{n+1,t}) < (1 + e_{1,t+n,t})$$

folgt tatsächlich

$$(1 + e_{1,t+n,t}) : (1 + R_{n+1,t}) > 1.$$

Also ist

$$(1 + R_{n+1,t})^n > (1 + R_{n,t})^n,$$

woraus die Behauptung 6.1c durch Ziehen der n-ten Wurzel und Subtraktion von 1 auf beiden Seiten der letzten Ungleichung unmittelbar folgt.

Für eine sinkende Ertragskurve bzw. eine fallende Kurve der Erwartungszinssätze wie im Fall 1-AI-2¹⁾ gelten die obigen Ausführungen entsprechend, wenn man die Beziehungen in den Ungleichungen umkehrt.

Bei Tabelle 1-AI-3 ist zu beachten, daß der neue Mittelwert, der durch Hinzunehmen des Faktors $(1 + e_{1,t+i,t})$ zu dem Radikanden des Ausdrucks für den geometrischen

1) Vgl. S. 26, 28

Mittelwert $(1 + R_{1,t})$ als i -ter Wurzel aus dem Produkt

$$(1 + R_{1,t}) (1 + e_{1,t+1,t}) \dots (1 + e_{1,t-i,t})$$

entsteht, immer dann größer oder kleiner als der alte Mittelwert sein muß, wenn dieser Faktor größer oder kleiner als der alte Mittelwert ist, allerdings wegen der Glättung durch die anderen Faktoren mit verringerter Schwankung.

Während Malkiel ausdrücklich darauf hinweist, daß ein monotoner Ertragskurvenverlauf nicht notwendig auch einen monoton steigenden bzw. fallenden Verlauf der Jahres-terminzinssätze (forward rates) erfordert, sagt Faßbender: "Die ansteigende Ertragskurve entsteht bei der Erwartung steigender kurzfristiger Zinssätze" ¹⁾, ohne zu präzisieren, ob diese Bedingung nur hinreichend (was zutrifft), oder auch notwendig ist, was nicht zutreffen würde, wie im folgenden gezeigt wird. Die von Malkiel angegebene Bedingung ²⁾ lautet dagegen exakter, nämlich

$${}_{t+k-1}R_1 > {}_tR_{k-1} \cdot$$

Das Beispiel von Faßbender aus Tabelle 1-AI-1 würde in Abänderung von

$$e_{1,t+4,t} = 6,5 \quad \text{in} \quad e_{1,t+4,t} = 5,9$$

die nicht monoton steigende Folge von

$$e_{i,t+i,t}\text{-Werten } 1,5; 4,5; 6,0; 5,9; 6,5; \text{ usw.}$$

mit den dazugehörigen

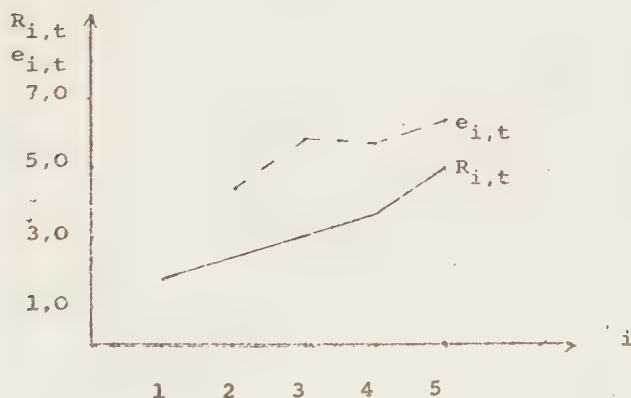
$$R_{i,t}\text{-Werten } 1,5; 3,0; 4,0; 4,475; 4,88; \text{ usw.}$$

ergeben, d.h. die Folge der $R_{i,t}$ -Werte bleibt monoton, auch bei der nicht monotonen $e_{1,t+i,t}$ -Wertfolge.

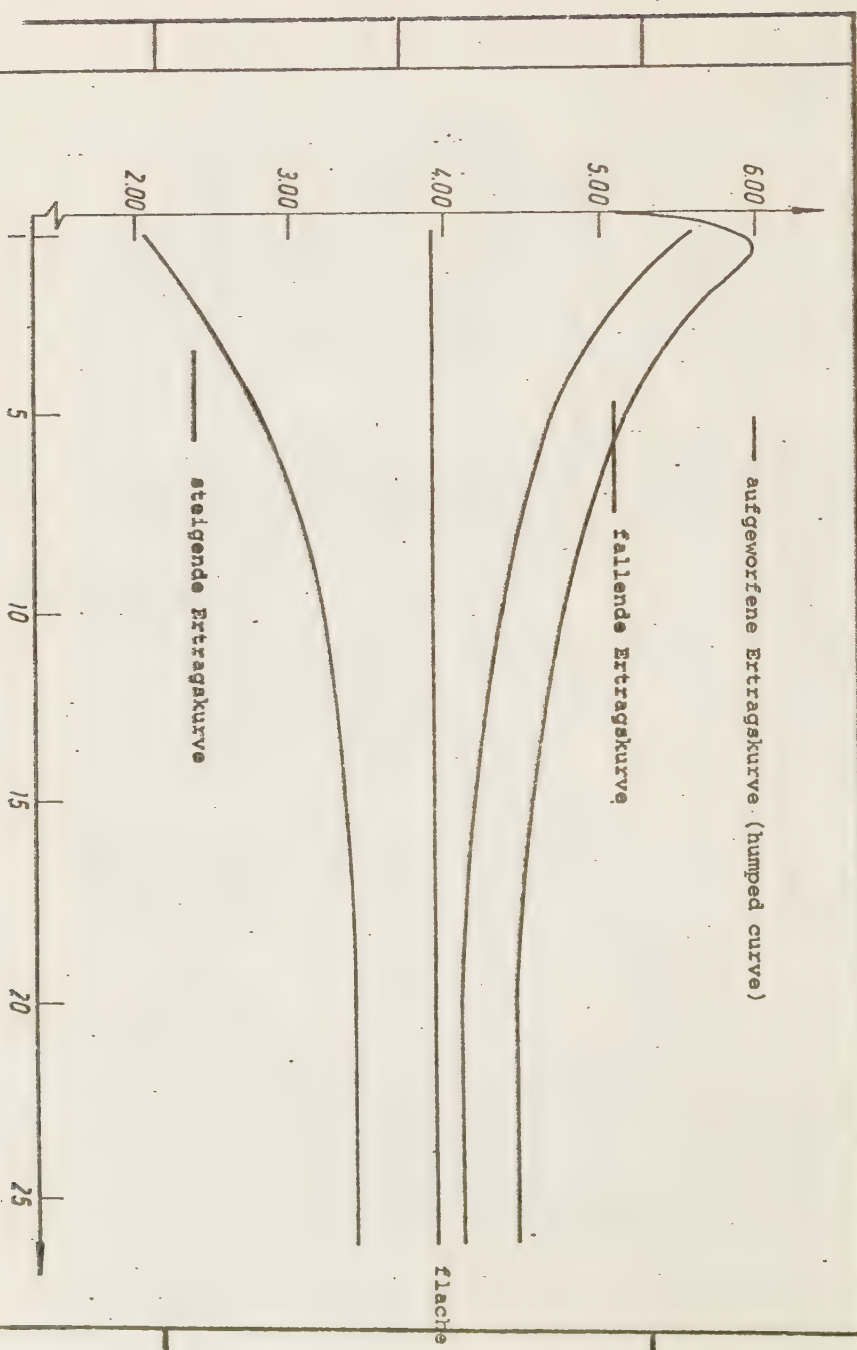
1) Faßbender, H., a.a.O., S. 87

2) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 22

i	$e_{1,t+i-1,t}$ in %	$R_{i,t}$ in % arithm.M.	$R_{i,t}$ in % geomtr.M.
1	-	1,5	1,50
2	4,5	3,0	2,99
3	6,0	4,0	3,93
4	5,9	4,475	4,46
5	6,5	4,88	4,86
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
	6,5	6,5	6,50



Zusammenfassend läßt sich sagen, daß sich grundsätzlich, was auch Malkiel schon hervorgehoben hat, drei Typen Ertragskurven unterscheiden lassen, wenn man von der parallel zur (Lauf-)Zeitachse verlaufenden, flachen Ertragskurve absieht, d.h. einer Kurve, die über die gesamte Laufzeit mit konstanten ${}_tR_i$ ($i = 1, \dots, n$) gekennzeichnet ist.



Aus der Laufzeitstruktur ${}_tR_i$ ($i=1,\dots,n$) ergibt sich für jeden einzelnen Zeitpunkt t der absoluten Zeitskala (der vordere Index t von ${}_tR_i$ kann z.B. den Zeitpunkt 1.1.1910 bedeuten) eine aus dieser Laufzeitstruktur $1.1.1910R_i$ ($i=1,\dots,n$) ableitbare Ertragskurve.

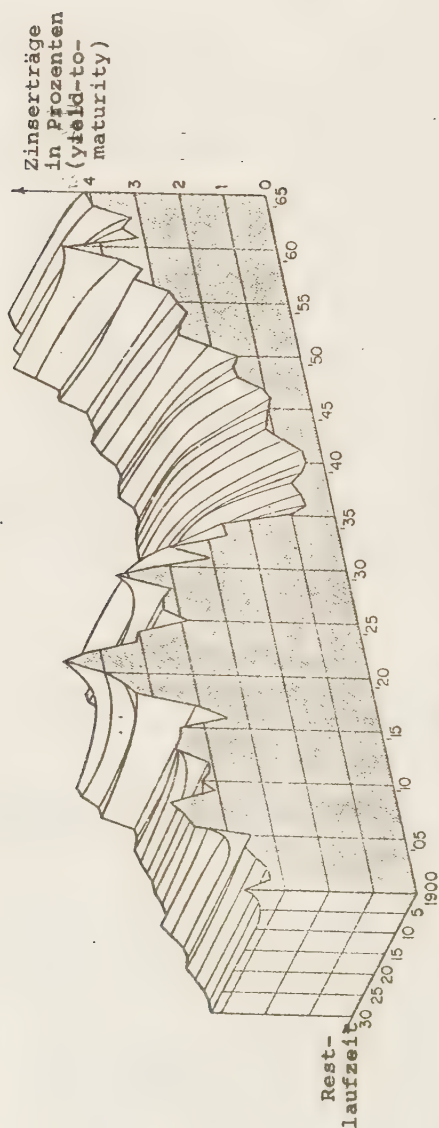
Die Gesamtheit aller Ertragskurven bei Malkiel, etwa für den Zeitraum von 1900 - 1965, läßt sich daher nicht mehr zweidimensional, sondern nur noch dreidimensional darstellen.¹⁾ Dabei verwendet Malkiel die x-Achse als absolute Zeitachse, deren Nullpunkt dem 1.1.1900 entspricht, und die y-Achse als Laufzeitachse (dem Index i von ${}_tR_i$ entsprechend) und die z-Achse als Ertragsachse mit der Maßeinheit Jahresprozente. Die einzelnen Ertragskurven ergeben sich folglich als Schnittlinien des genannten dreidimensionalen Gebildes mit Ebenen, die die absolute Zeitachse (x-Achse) im betreffenden Bezugszeitpunkt schneiden und parallel zur y/z-Ebene liegen (Laufzeit-Ertrags-Ebene).

Ganz allgemein findet man auch bei anderen Verfassern, die sich mit der Zinstheorie beschäftigen, wie z.B. bei Kath, ähnliche Feststellungen über den Zusammenhang zwischen Wertpapierlaufzeit und Zinshöhe.

Kath kennzeichnet die typischen Merkmale der Beziehung zwischen Wertpapierlaufzeit und Zinshöhe in folgenden fünf Empiemen:

1. "Am häufigsten ist ein Anstieg der Rendite für zunehmende Laufzeiten festzustellen. Diesem Normalbild der Zinsstruktur entspricht eine steigende Zinsertragskurve.
2. Vergleichsweise selten nimmt die Verzinsung mit höherer Laufzeit ab, so daß die Zinsstruktur durch eine fallende yield curve repräsentiert wird.
3. Die absolute Zinsertragsdifferenz zwischen zwei

1) Vgl. folgende Seite



Die Gesamtheit der Ertragskurven
ausgewählter Obligationen (corporate bonds) für den Zeitraum
1900 bis 1965

Quelle: Malkiel, B.G., a.a.O., S. 8

Schuldverschreibungen, deren Fälligkeiten sich durch eine Zeiteinheit unterscheiden, ist um so geringer, je länger die Laufzeit der Papiere ist. Für den Verlauf der Zinsertragskurve bedeutet dies ein Abflachen im rechten Teil.

4. Die steigende yield curve ist vorwiegend bei niedrigem Zinsniveau, die fallende dagegen bei hohem Zinsniveau anzutreffen.
5. Während diese Merkmale den Zustand der Zinsstruktur in einem beliebigen Zeitpunkt beschreiben, gilt für das Verhältnis der Zinssätze im Zeitablauf, daß der kurzfristige Zins erheblich stärker schwankt - d.h. höher steigt und niedriger sinkt - als der Zinsfuß für Papiere mit langer Laufzeit."

1) Kath, D., Die verschiedenen Ansätze der Zinsstrukturtheorie, in: Kredit und Kapital, Heft 1, 1972, S.28-69, hier S. 32

II. Abhängigkeiten der Grundgrößen der Zinsstruktur voneinander

1. Die Kursformel als Hilfsmittel zur Berechnung von Kurswerten und Effektivzinssätzen

Die bereits im Abschnitt "Couponfreie und Couponversehene Wertpapiere" benutzte Kursgleichung

$$r_o p_o^{(n)} = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)} + \frac{r_o}{1+r_1} + \dots + \frac{r_o}{(1+r_1)\dots(1+r_n)} \quad 1)$$

war dort mit der entsprechenden Kursgleichung für den (auf diese Weise definierten) Effektivzinssatz r_e , nämlich

$$r_o p_o^{(n)} = \frac{1}{(1+r_e)^n} + \frac{r_o}{(1+r_e)} + \frac{r_o}{(1+r_e)^2} + \dots + \frac{r_o}{(1+r_e)^n}$$

$$= \frac{1 + r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^n},$$

verglichen worden.

Der zuerst genannte (ungequerte) Kurs ist der Anfangskurs, der durch die hier als gegeben betrachtete Zinssatzfolge r_i ($i = 1, \dots, n$) und den ebenfalls als gegeben angesehenen Couponsatz r_o eindeutig bestimmt ist, wenn der Nennwert 1 (bzw. 100) beträgt. Da die Kombination der genannten Zinssätze (Zinssatzfolge und Couponsatz) als Bestimmungsgröße für den (ungequerten) Kurs in dieser Arbeit sehr häufig auftritt, wird sie im folgenden als Zinssatzgruppe (r_i ($i=1, \dots, n$)/ r_o) bezeichnet werden; z.B. gehört zur Zinssatzgruppe (3/5//4) der Kurs $4p_{ol}^{(2)} = 1,0004622$, während zur Zinssatzgruppe (5/3//4) der Kurs $4p_{o2}^{(2)} = 0,9997226$ gehört.

1) Vgl. die Formel von Meiselman in der Fußnote 1) auf S. 2 der Arbeit, die in die obige Formel übergeht, wenn man $p_1, \dots, p_{n-1}$ durch r_o sowie p_n durch $1+r_o$ ersetzt und gleichzeitig in den Nennern für $(1 + r_i)^{i_o}$ gemäß der Definitionsgleichung der klassischen Erwartungstheorie (vgl. S.7 der Arbeit) die Produkte $\prod_{j=1}^i (1 + r_j)$ schreibt.

Die ungequerten Zwischenkurse $r_0 p_i^{(n)}$ ($i=0, \dots, n$), d.h. die Kurswerte, die sich auf den Beginn des i -ten Jahres der Laufzeit n des Wertpapiers, also auf den Zeitpunkt $t+i$ der absoluten Zeitskala, beziehen, kann man im Hinblick auf den letzteren Zeitpunkt ($t+i$) als Anfangskurse auffassen. Ihre (Rest-)Laufzeit beträgt $(n-i)$ Jahre, nämlich vom Zeitpunkt $t+i$ bis zum Zeitpunkt $t+n$ der absoluten Zeitskala. Sind mehrere Momentankurse - für das Beispiel der Zinssatzgruppe (5/6/8//5) z.B. die vier Kurswerte $5p_0^{(3)}$, $5p_1^{(3)}$, $5p_2^{(3)}$, $5p_3^{(3)}$ - zu bestimmen, so geht man zweckmäßig rekursiv vor¹⁾, d.h. man bestimmt zunächst den letzten Kurswert $5p_3^{(3)} = 1$, dann durch Addieren des Couponsatzes $r_0 = 0,05$ und Division durch den letzten Zinsfaktor $1 + r_3 = 1,08$ den vorletzten Kurs $5p_2^{(3)}$ ($= 0,972$) usw.

Der gequerte Anfangskurs $r_0 \overline{p_0^{(n)}}$ ist (wie der ungequerte) eine lineare Funktion des Couponsatzes r_0 und im übrigen eine gebrochen rationale Funktion des Effektivzinssatzes r_e formal vom $(n+1)$ ten Grade im Nenner und vom n -ten Grade im Zähler.²⁾

Durch Gleichsetzung der beiden Anfangskurse $p_0^{(n)}$ und $\overline{p_0^{(n)}}$, d.h. durch Kurselimination, ergibt sich eine Bestimmungsgleichung n -ten Grades in r_e , also eine ausschließliche Abhängigkeit des Zinssatzes r_e von der als gegeben angenommenen Zinssatzgruppe. Da $p_0^{(n)}$ und $\overline{p_0^{(n)}}$ beide den Barwert aller geleisteten Zahlungen

1) Vgl. S.12 und S.226

2) Der Quotient $\frac{(1+r_e)^n - 1}{r_e}$ hat an der Stelle r_e eine Lücke und läßt sich für $r_e \neq 0$ durch r_e kürzen.

Vgl. auch Abschnitt II, 4: "Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Couponsatz", S. 73

(Nennwert + Couponzahlungen) darstellen, ist der Zinssatz r_e in seiner Wirksamkeit infolge der Ersetzung der n Diskontierungsnenner $\prod_{j=1}^n (1 + r_j)$ durch die entsprechenden Potenzen $(1 + r_e)^i$ von $1 + r_e$ effektiv dieser Zinssatzgruppe äquivalent; r_e wird daher als Effektivzinssatz bezeichnet.

Die Bestimmungsgleichung für den Effektivzinssatz r_e , die durch Gleichsetzung (Elimination) der gequerten und ungequerten Kursgrößen entsteht, geht, wenn man die Zinssatzgruppe nicht als gegeben betrachtet, in eine Funktionsgleichung mit entsprechend vielen Variablen über. Die Anzahl der in dieser Gleichung auftretenden unabhängigen Variablen ist $n+1$, wenn man den Effektivzinssatz als abhängige Variable betrachtet, da die Laufzeit - in Zinsperioden gerechnet - mit der Anzahl n der Einperiodenterminzinssätze r_i ($i = 1, \dots, n$) übereinstimmt, und r_e außerdem auch noch vom Couponsatz r_o abhängt.

Wegen der linearen Abhängigkeit der gequerten und ungequerten Kurse vom Couponsatz läßt sich die Elimination des Kurses durch eine Elimination des Couponsatzes ersetzen. In diesem Falle ist der Effektivzinssatz, wenn man die gegebene Zinssatzgruppe als bekannt voraussetzt, nur noch eine Funktion des Kurses.

Bezeichnet man den Faktor von r_o im Zähler der Kursgleichung

II-1-3

$$p_o^{(n)} = \frac{1+r_o \left[1+(1+r_n)+(1+r_n)(1+r_{n-1})+\dots+(1+r_n)\dots(1+r_2) \right]}{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)}$$

zur Vereinfachung der Schreibweise mit $c^{(n)}$ und das Produkt im Nenner mit $\prod^{(n)}$, so läßt sich r_o als Funktion von $p_o^{(n)}$ in der Form

$$r_o = \frac{p_o^{(n)} \prod^{(n)} - 1}{c^{(n)}}$$

darstellen.

Aus

II-1-4

$$\overline{p_o^{(n)}} = \frac{1 + r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

folgt andererseits, wenn man dabei noch die Gleichheit der gequerten und ungequerten Kursgrößen berücksichtigt

$$r_o = \frac{p_o^{(n)} r_e (1 + r_e)^n - r_e}{(1 + r_e)^n - 1}.$$

Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für r_o ergibt die folgende Coupon-Eliminationsgleichung

$$\frac{p_o^{(n)} r_e (1 + r_e)^n - r_e}{(1 + r_e)^n - 1} = \frac{p_o^{(n)} \Pi^{(n)} - 1}{c^{(n)}}$$

die in die $p_o^{(n)}$ -explizite Form

$$p_o^{(n)} \left[\frac{r_e (1 + r_e)^n}{(1 + r_e)^n - 1} - \frac{\Pi^{(n)}}{c^{(n)}} \right] = \frac{r_e}{(1+r_e)^n - 1} - \frac{1}{c^{(n)}}$$

oder

II-1-5

$$p_o^{(n)} = \frac{r_e c^{(n)} - \left[(1+r_e)^n - 1 \right]}{r_e c^{(n)} (1+r_e)^n - \Pi^{(n)} \left[(1+r_e)^n - 1 \right]}$$

überführt werden kann.

Setzt man zur Abkürzung und zwecks besserer Übersichtlichkeit den Zinsfaktor $1+r_e$ (da ja r_e die gesuchte Größe ist, wenn die obige Gleichung als Bestimmungsgleichung für den Effektivzinssatz aufgefaßt wird) gleich y und r_e somit gleich $y-1$, so erhält man für den Kurs $p_o^{(n)}$ den Ausdruck

II-1-5a

$$p_o^{(n)} = \frac{c^{(n)} (y-1) - (y^n - 1)}{c^{(n)} y^n (y-1) - \Pi^{(n)} (y^n - 1)}.$$

Daß $p_o^{(n)}$ im Nenner nur "formal"¹⁾ vom $(n+1)$ ten Grade in y bzw. in r_e ist, folgt aus der Tatsache, daß die rechte Seite von $p_o^{(n)}$ durch $y-1$ kürzbar ist (was unter der Voraussetzung $r_e > 0$, also $y = (1+r_e) > 1$,

1) Vgl. Abschnitt II, 4: "Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Couponsatz", S. 73

die allgemein zu machen ist), erlaubt ist.

Nach dem Kürzen durch $r_e = y-1$ erhält man

II-1-5b

$$p_o^{(n)} = \frac{c^{(n)} - \frac{y^n - 1}{y - 1}}{c^{(n)} y^n - \Pi^{(n)} \frac{y^n - 1}{y - 1}},$$

wo bekanntlich $\frac{y^n - 1}{y - 1}$ (unter der Voraussetzung $y \neq 1$)

als Abkürzung für die Summe

$$y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1$$

geschrieben werden kann.

Aus der Bestimmungsgleichung für r_e , die man durch Kurselimination erhält, nämlich

$$\frac{1+r_o c^{(n)}}{\Pi^{(n)}} = \frac{1 + r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^n},$$

ergibt sich, wenn man diese in die r_o -explizite Form bringt und $(1+r_e)$ durch y ersetzt, für r_o der Ausdruck

II-1-6

$$r_o = \frac{y^n - \Pi^{(n)}}{\frac{y^n - 1}{y - 1} \Pi^{(n)} - y^n c^{(n)}}, \text{ der}$$

durch Abspaltung des Linearfaktors $(y-1)$ auf der rechten Seite in die Gleichung

II-1-6a

$$r_o = (y-1) \frac{y^n - \Pi^{(n)}}{\Pi^{(n)} (y^{n-1} - y^n c^{(n)}) \cdot (y-1)}$$

übergeht, die im Nenner "formal" vom $(n+1)$ ten Grade in y (bzw. in r_e) ist. ¹⁾

1) Vgl. den Abschnitt "Die Abhängigkeit des Effektivzins-satzes vom Couponsatz", S. 73

Die $p_o^{(n)}$ -explizite Form eignet sich wegen ihrer wenig übersichtlichen Form nicht besonders zur Bestimmung des Effektivzinssatzes r_e , selbst dann nicht, wenn der Kurs $p_o^{(n)}$ anstelle des Couponsatzes r_o gegeben ist. Durch die Gleichung

$$r_o = \frac{p_o^{(n)} \cdot \Pi^{(n)} - 1}{c^{(n)}}$$

läßt sich, wenn man diesen Ausdruck für r_o in die Gleichung

$$p_o^{(n)} = \frac{1 + r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

einsetzt, eine übersichtlichere Bestimmungsgleichung für r_e erhalten.

Ist z.B. $r_1 = 0,05$, $r_2 = 0,06$, $r_3 = 0,08$ und $p_o^{(3)} = 0,9660577$ gegeben, so folgt aus

$$r_o = \frac{0,9660577 \cdot 1,20204 - 1}{3,2248} = 0,05$$

die Bestimmungsgleichung 3. Grades für $y = 1+r_e$

$$\begin{aligned} 0,9660577 &= \frac{1 + 0,05 \left[(1+r_e)^3 - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^3} \\ &= \frac{1 + 0,05 (y^2 + y + 1)}{y^3} \end{aligned}$$

Die normierte Form dieser Gleichung, nämlich

$$y^3 - \frac{0,05}{0,9660577} \cdot y^2 - \frac{0,05}{0,9660577} \cdot y - \frac{1,05}{0,9660577} = 0,$$

hat als einzige reelle Lösung $y_1 = 1,0627631$; also $r_e = 0,0627631$.

2. Kurs und Effektivzinssatz in Abhängigkeit von der Laufzeit

Betrachtet man die Einperiodenterminzinssätze als gegeben, besteht zwischen $p_o^{(n)}$ und r_o ein sehr einfacher Zusammenhang gemäß der Kursgleichung

$$p_o^{(n)} = \frac{1 + r_o c^{(n)}}{\pi(n)}.$$

Die allgemeine Beziehung zwischen Kurswert und Effektivzinssatz bzw. zwischen Couponsatz und Effektivzinssatz erkennt man am besten, wenn man den Ausdruck für den (gequerten) Kurs $\overline{p_o^{(n)}}$ in zwei Komponenten zerlegt, von denen die erste von der Laufzeit n abhängt, während die zweite von ihr unabhängig ist.

Die rechte Seite der Gleichung

$$\overline{p_o^{(n)}} = \frac{1 + r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

läßt sich nämlich in die Form

$$\begin{aligned} \overline{p_o^{(n)}} &= \frac{r_e + r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right]}{r_e (1+r_e)^n} = \frac{(r_e - r_o) + r_o (1+r_e)^n}{r_e (1 + r_e)^n} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{r_o}{r_e}\right)}{(1 + r_e)^n} + \frac{r_o}{r_e} \end{aligned}$$

überführen, wo nur der erste Summand $\frac{1 - \frac{r_o}{r_e}}{(1 + r_e)^n}$ die

Laufzeit n , und zwar als Exponent von $1+r_e$ im Nenner enthält.

Ist $r_e > r_o$, so ist dieses Glied (laufzeitabhängige Komponente) positiv, während im Falle $r_e < r_o$ dieses Glied negativ wird.

Der Konsolkurs $\frac{r_o}{r_e}$ stellt sich bei dieser Aufspaltung

in beiden Fällen, Fall a) $r_e > r_0$, Fall b) $r_e < r_0$, als Grenzwert für den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ dar, wenn man die allgemeine Annahme $r_e > 0$, also $(1+r_e) > 1$, zugrundelegt.

Der wesentliche Unterschied zwischen Fall a) und b) besteht darin, daß die Annäherung an den Grenzwert $\frac{r_0}{r_e}$ im Fall a) asymptotisch "von oben", im Fall b) asymptotisch "von unten" erfolgt, die "Kurskurve", d.h. die Kurve, die die Abhängigkeit des Kurses von der Laufzeit wiedergibt, im Fall a) eine fallende, im Fall b) eine steigende Tendenz aufweist.

Allerdings hat der Nenner r_e im Quotienten $\frac{r_0}{r_e}$ (im allgemeinen jedenfalls) keinen konstanten Zahlenwert; r_e (richtiger $r_e^{(n)}$) ist (unabhängig von der Laufzeit n) nur dann konstant, wenn die als gegeben angesehene Zinssatzfolge (Einperiodenterminzinssätze) r_i ($i = 1, \dots, n$) aus lauter gleichen Zinssätzen besteht, da aus

$$p_0^{(n)} = \frac{1 + r_0 \left[1 + (1+r_n) + \dots + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots (1+r_2) \right]}{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)}$$

mit $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$

$$p_0^{(n)} = \frac{1 + r_0 \left[1 + (1+r) + \dots + (1+r)^{n-1} \right]}{(1 + r)^n}$$

folgt.

Dadurch wird erreicht, daß die rechte Seite $\overline{p_0^{(n)}}$ der Bestimmungsgleichung $p_0^{(n)} = \overline{p_0^{(n)}}$ für r_e , nämlich

$$\overline{p_0^{(n)}} = \frac{1 + r_0 \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

bis auf den Index e von r_e gliedweise mit der linken Seite $p_0^{(n)}$ übereinstimmt, da

$$\left[(1 + r_e)^n - 1 \right] : r_e = \frac{(1 + r_e)^n - 1}{(1 + r_e) - 1}$$

nichts anderes als die Summenformel für die Reihe

$$1 + (1 + r_e) + (1 + r_e)^2 + \dots + (1 + r_e)^n - 1$$

ist.

Stimmt der Couponsatz r_o mit dem konstanten Zahlenwert $r_i = r (= r_e)$ ($i = 1, \dots, n$) überein, so ist und bleibt der Kurs pari. Ist dagegen r_o größer oder kleiner als $r_i (= r = r_e)$, so läßt sich der Ausdruck für $p_o^{(n)}$, wenn man ihn in der oben angedeuteten Weise in $\frac{r_o}{r_e} = \frac{r_o}{r}$

und $\frac{1 - \frac{r_o}{r_e}}{(1 + r_e)^n} = \frac{1 - \frac{r_o}{r}}{(1 + r)^n}$ zerlegt, mit $1 + r = q$ in der Form

$$p_o^{(x)} = \frac{r_o}{q-1} + \left(1 - \frac{r_o}{q-1}\right) q^{-x}$$

schreiben.

$p_o^{(x)}$ stellt also in Abhängigkeit von der Laufzeit $n=x$ (wenn man sich x kontinuierlich veränderlich denkt) eine Exponentialfunktion mit der waagerechten Asymptote

$$\frac{r_o}{q-1} = \frac{r_o}{r} \text{ dar.}$$

Ist der Couponsatz r_o kleiner als r , so ist der Faktor von q^{-x} positiv, d.h. der Kurs $p_o^{(n)}$ sinkt mit wachsender Laufzeit auf den Wert $\frac{r_o}{r}$ ab; ist der Couponsatz r_o größer als r , so tritt das Umgekehrte ein.

Beispiel a) r_i ($i=1 \dots 4$) = 0,05; r_o = 0,06;

Für ${}_6p_o^{(4)}$ (Laufzeit 4 Jahre) findet man

$$\begin{aligned} {}_6p_o^{(4)} &= \frac{1 + 0,06 (1 + 1,05 + \dots + 1,05^3)}{1,05^4} \\ &= \frac{0,06}{0,05} + \left(1 - \frac{0,06}{0,05}\right) \cdot 1,05^{-4} \\ &= \frac{1,2}{\text{(Grenzwert für Konsols)}} - 0,2 \cdot 0,8227025 = 1,2 - 0,1645405 \\ &= \underline{\underline{1,0354595}} \end{aligned}$$

Beispiel b) $r_i = 0,05$ ($i=1\dots 8$); $r_o = 0,06$

Für ${}_6P_o^{(8)}$ (Laufzeit 8 Jahre) findet man

$${}_6P_o^{(8)} = \frac{1 + 0,06 \frac{1,05^8 - 1}{0,05}}{1,05^8}$$

$$= \frac{0,06}{0,05} + (1 - \frac{0,06}{0,05}) 1,05^{-8} = 1,2 - 0,2 \cdot 0,6768394$$

$$= \underline{\underline{1,1864633}}.$$

Für $n=16$ würde sich ein Kurs von $1,2 - 0,0916223$ ergeben, also ein Kurs, der nur noch um 7,6% vom Konsolkurs 1,2 abweicht.

Besteht die Folge der Einperiodenterminzinssätze aus verschiedenen Zinssätzen innerhalb eines bestimmten Bereiches, z.B. $r_1 = 0,05$; $r_2 = 0,06$; $r_3 = 0,07$ und $r_4 = 0,08$, so bestimmen diese Zinssätze zusammen mit dem Couponsatz r_o , der hier gleich 0,06 sein möge, nicht nur eindeutig den zugehörigen (Anfangs-)Kurs

$${}_6P_o^{(4)} = \frac{1 + 0,06 (1+1,08+1,08 \cdot 1,07 - 1,08 \cdot 1,07 \cdot 1,06)}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,07 \cdot 1,08}$$

$$= 0,9855769 ,$$

sondern auch wegen ${}_6P_o^{(4)} = {}_6P_o^{(4)}$ mit

$${}_6P_o^{(4)} = \frac{1 + 0,06 [(1+r_e)^4 - 1] : r_e}{(1 + r_e)^4}$$

eindeutig den Effektivzinssatz r_e (richtiger ${}_6r_e^{(4)}$), der sich als (positiv-reelle) Lösung der Gleichung

4. Grades in r_e

$$0,9855769 = \frac{1 + 0,06 [(1+r_e)^4 - 1] : r_e}{(1 + r_e)^4}$$

ergibt. Für r_e erhält man so den Zahlenwert

$${}_6r_e^{(4)} = 0,0642025.$$

Will man nun die Laufzeit von 4 auf 8 Jahre (1 Jahr = 1 Zinsperiode) verlängern, so müssen die Einperiodenterminzinssätze für die nächsten 4 Jahre bekannt sein, wenn man bei unverändertem Couponsatz $r_0 = 0,06$ Kurs und Effektivzinssatz in gleicher Weise wie oben berechnen will.

Man kann aber auch umgekehrt fordern, daß etwa (Fall 1) der Kurs $p_0^{(4)}$ unverändert bleibt, also ${}_6p_0^{(4)} = {}_6p_0^{(8)}$ ist. Außerdem soll aus Zweckmäßigkeitsgründen (Eindeutigkeit der zu bestimmenden Zwischenwerte) angenommen werden, daß die vier auf r_i ($i=1...4$) folgenden Einperiodenterminzinssätze r_5, r_6, r_7, r_8 unter sich gleich sind.

Man erkennt, daß dann $r_5 = r_6 = r_7 = r_8 = 0,06$, also gleich r_0 sein muß, da der Kurswert ${}_6p_4^{(8)} = {}_6p_4^{(4)} = 1$ dann bis zum Ende der Laufzeit unverändert bleibt. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} & \frac{1 + 0,06(1 + 1,06 + 1,06^2 + 1,06^3 + 1,06^4 \cdot 4,460536)}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,07 \cdot 1,08 \cdot 1,06^4} \quad 1) \\ & = \frac{1 + 0,06 \left[\frac{1,06^4 - 1}{0,06} + 1,06^4 \cdot 4,460536 \right]}{1,2861828 \cdot 1,2624769} = 0,9855768, \end{aligned}$$

also praktisch gleich dem geforderten ${}_6p_0^{(4)}$ -Wert 0,985576.

Fordert man andererseits, daß der Effektivzinssatz ${}_6r_e^{(4)}$ 2) mit dem Effektivzinssatz ${}_6r_e^{(8)}$, der durch die Zinssatzgruppe $(5/6/7/8/r_5/r_6/r_7/r_8//6)$ bestimmt ist, überein-

-
- 1) Dabei steht $1,06^4 \cdot 4,460536$ für $1,06^4 \cdot 1$
 $+ 1,06^4 \cdot 1,08$
 $+ 1,06^4 \cdot 1,08 \cdot 1,07$
 $+ 1,06^4 (1,08 \cdot 1,07 \cdot 1,06)$
- 2) Der Effektivzinssatz r_e verringert sich daher von
 ${}_6r_e^{(4)} = 0,0642025$ auf ${}_6r_e^{(8)} = 0,0623442$.

stimmt, wo $r_5 = r_6 = r_7 = r_8$ konstant $= r$ ist, so erhält man für r mit Hilfe des Kurses

$$\begin{aligned} {}_6P_0^{(8)} &= \frac{1 + 0,06(1,0642025^8 - 1) : 0,0642025}{1,0642025^8} \\ &= 0,9743318 \end{aligned}$$

aus der Bestimmungsgleichung ${}_6P_0^{(8)} = \overline{{}_6P_0^{(8)}}$ mit

$$\begin{aligned} {}_6P_0^{(8)} &= \frac{1 + 0,06 \left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + (1+r)^4 \cdot 4,460536 \right]}{(1+r)^4 \cdot 1,2861828} \\ &= \frac{1 + 0,06 \left[\frac{(1+r)^4 - 1}{r} + (1+r)^4 \cdot 4,460536 \right]}{(1+r)^4 \cdot 1,2861828} \end{aligned}$$

den Wert $r (= r_5 = r_6 = r_7 = r_8) = 0,0642143$.

Dieser Einperiodenterminzinssatz für die letzten 4 Jahre ist größer als der Effektivzinssatz ${}_6r_e^{(8)} = {}_6r_e^{(4)} = 0,0642025$.

Das ist leicht einzusehen, wenn man den Begriff des "angepaßten Effektiv (= angepaßten Coupon-)zinssatzes" ¹⁾ als bekannt voraussetzt, denn $r_0 = 0,06$ liegt nicht nur unter dem "sogenannten" geometrischen Mittelwert

$$r_g^{(4)} = \sqrt[4]{1,2861828 - 1} = 0,0649412$$

bzw. unter dem arithmetischen Mittelwert 0,065 der Zinssatzfolge (5/6/7/8), sondern auch unter dem dieser Folge "angepaßten", d.h. zum Parikurs gehörigen Zinssatz-

$$r_{oe}^{(4)} = r_{eo}^{(4)} = \frac{1,2861828 - 1}{4,460536} = 0,0641588. \quad 2)$$

Allgemein erhält man unter der Voraussetzung, daß der ${}_6r_e^{(4)}$ -Wert als Effektivzinssatz bei der Laufzeitverlängerung konstant bleibt, für den "Restzinssatz", mit dem

1) Vgl. Abschnitt II,5, S. 84

die vier ersten konstant zu haltenden Zinssätze

$r = r_i$ ($i=1,2,3,4$) bis zur Mächtigkeit n "aufgefüllt" werden müssen, im Grenzfall unendlich langer Laufzeit ($n=\infty$) den Ausdruck

$$r_{\infty} = r_i \quad (i=5, \dots, \infty) = \frac{r_e}{\Pi^{(4)} - r_e \cdot c^{(4)}} \cdot$$

Dabei ist

$$\Pi^{(4)} = 1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,07 \cdot 1,08 = 1,2861828$$

$$\text{und} \quad c^{(4)} = 1 + 1,08 + 1,08 \cdot 1,07 + 1,08 \cdot 1,07 \cdot 1,06 \\ = 4,460536.$$

Einsetzen dieser Werte sowie des Wertes von r_e , nämlich $r_e = {}_6r_e^{(4)} = 0,0642025$, ergibt für r_i ($i=5, \dots, \infty$) den Grenzwert ${}_6r_{\infty} = 0,064215$, also rund 6,42%.

Die Formel r_i ($i=5, 6, \dots, \infty$) = $\frac{r_e}{\Pi^{(4)} - r_e \cdot c^{(4)}}$ folgt aus der Gleichsetzung der Kurswerte

$${}_6p_o^{(n)} = \frac{r_o}{r_e} + \frac{1 - \frac{r_o}{r_e}}{(1+r_e)^n}$$

und

$${}_6p_o^{(n)} = \frac{1 + r_o \left[\frac{(1+r_i)^{n-4} - 1}{r_i} + (1+r_i)^{n-4} \cdot c^{(4)} \right]}{r_i^{n-4} \cdot \Pi^{(4)}} \quad (i=5, 6, \dots, n)$$

die für $n \rightarrow \infty$ zur Gleichung

$$\frac{r_o}{r_e} = \frac{r_o}{\Pi^{(4)}} \left(\frac{1}{r_{\infty}} + c^{(4)} \right)$$

führt. Auflösung nach r_{∞} liefert dann die obige Gleichung.

Dabei könnte man annehmen, daß der $r_{\infty} = r_i$ ($i=5, \dots, \infty$)-

Wert (in der Grenze, d.h. für $n \rightarrow \infty$) unabhängig vom Couponsatz r_o ist, durch den man beide Seiten der obigen Gleichung kürzen kann, andererseits steckt der Couponsatz r_o

aber bereits in dem Effektivzinssatz $r_e = {}_6r_e^{(4)}$ für die vierjährige Laufzeit, der ja bei der Verlängerung der Laufzeit konstant gehalten werden soll.

Ändert man das obige Beispiel in dem Sinne ab, daß man den r_o -Wert 0,06 durch den r_o -Wert 0,07 ersetzt, der sowohl größer als das arithmetische Mittel 0,065 der r_i -Werte ($i=1, \dots, 4$) als auch größer als der soeben bestimmte "angepaßte" Effektivzinssatz

$$r_{eo}^{(4)} = r_{oe}^{(4)} = 0,0641588$$

ist, so ergeben sich für ${}_7p_o^{(4)}$ bzw. ${}_7r_e^{(4)}$ die folgenden Zahlenwerte:

$${}_7p_o^{(4)} = 1,0202573; \quad {}_7r_e^{(4)} = 0,0640989.$$

Fordert man hier (Fall 2), daß bei Verlängerung der Laufzeit n von 4 auf 8 Jahre der Effektivzinssatz ${}_7r_e^{(4)}$ mit dem Effektivzinssatz ${}_7r_e^{(8)}$ übereinstimmt (wieder unter der Annahme, daß $r_5 = r_6 = r_7 = r_8$ ist), so erhält man für $r = r_i$ ($i=5,6,7,8$) in entsprechender Weise wie oben den Wert $r = 0,0640806$, also einen Zahlenwert, der kleiner als der Effektivzinssatz ${}_7r_e^{(8)} = {}_7r_e^{(4)} = 0,0640989$ ist.

Fordert man nun wieder, daß der Anfangskurs, also $p_o^{(n)} = 0,9355769$, bei der Verlängerung der Laufzeit n von 4 auf 8 Jahre konstant bleibt (später soll die Laufzeit n alle ganzen Zahlen > 4 durchlaufen), so tritt - wie zuvor gezeigt - eine Verringerung des zu ${}_6p_o^{(4)}$ gehörigen Effektivzinssatzes von ${}_6r_e^{(4)} = 0,0642025$ auf ${}_6r_e^{(8)} = 0,0623442$ ein. Daß die Forderung ${}_6p_o^{(4)} = {}_6p_o^{(5)} = {}_6p_o^{(6)}$, allgemein $= {}_6p_o^{(n)}$ ($n > 4$), mit der Forderung $r_5 = r_6 = r_7$, allgemein $= r_n$ ($n > 4$), identisch ist (diese Identität wurde für den Fall einer Verlängerung der Laufzeit von 4 auf 8 Jahre bereits bewiesen), ergibt sich für ${}_6p_o^{(n)}$ aus der nachfolgenden

Gleichung

$${}_6p_o^{(n)} = \frac{1+0,06 \left[1+1,06+\dots+1,06^{n-5}+1,06^{n-4} \cdot 4,460536 \right]}{1,08 \cdot 1,07 \cdot 1,06 \cdot 1,05 \cdot 1,06^{n-4}} \quad (n > 4).$$

Dabei nimmt der Faktor $c^{(n)}$ ($n > 4$) von 0,06 im Zähler des vorstehenden Bruches (eckige Klammer) für $n=5$, $n=6$ usw. der Reihe nach die Zahlenwerte

$$\begin{aligned} c^{(5)} &= \frac{1,06^{5-4} - 1}{0,06} + 1,06^{5-4} \cdot 4,460536 \\ &= \frac{1,06^1 (1+4,460536 \cdot 0,06) - 1}{0,06} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^{(6)} &= \frac{1,06^{6-4} - 1}{0,06} + 1,06^{6-4} \cdot 4,460536 \\ &= \frac{1,06^2 (1+4,460536 \cdot 0,06) - 1}{0,06} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^{(n)} &= \frac{1,06^{n-4} - 1}{0,06} + 1,06^{n-4} \cdot 4,460536 \\ &= \frac{1,06^{n-4} (1+4,460536 \cdot 0,06) - 1}{0,06} \end{aligned}$$

an.

Beim Einsetzen dieser Werte in die Gleichung für ${}_6p_o^{(n)}$ heben sich nach der Multiplikation der $c^{(n)}$ -Werte ($n > 4$) mit 0,06 die Summanden +1 und -1 im Zähler auf, so daß für ${}_6p_o^{(5)}$; ${}_6p_o^{(6)}$ allgemein ${}_6p_o^{(n)}$ ($n > 4$) wegen

$$1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,07 \cdot 1,08 = 1,2861828$$

der Bruch

$$\begin{aligned} \frac{1,06^1 \cdot 1,2676321}{1,06^1 \cdot 1,2861828} &= \frac{1,06^2 \cdot 1,2676321}{1,06^2 \cdot 1,2861828} \\ &= \dots = \frac{1,06^{n-4} \cdot 1,2676321}{1,06^{n-4} \cdot 1,2861828} \end{aligned}$$

den konstanten Wert

$${}_6p_o^{(n)} = \frac{1,2676321}{1,2861828} = 0,9855769 \text{ hat, und zwar für}$$

alle $n > 4$, denn ${}_6p_o^{(4)} = 0,9855769$ war ja der Ausgangswert, dem alle ${}_6p_o^{(n)}$ ($n > 4$) gleich sein sollten.

Von den Effektivzinssätzen ${}_6r_e^{(n)}$ ($n=5,6,7,\dots$) ist der Effektivzinssatz für die Laufzeit $n=8$, nämlich ${}_6r_e^{(8)} = 0,0623442$ bereits angegeben worden.¹⁾

Für $n=5,6,7$ und 16 werden sie nachfolgend aus den zugehörigen ${}_6p_o^{(n)}$ -Werten, die ja ab $n=4$ alle gleich sein sollen, bzw. den r_i -Werten, die unter der gemachten Voraussetzung für $i > 4$ sämtlich mit dem Couponsatz $r_o = 0,06$ übereinstimmen müssen, der Reihe nach bestimmt.

Außerdem soll der Grenzwert ${}_6r_e^{(\infty)}$, der sich ergibt, wenn man die Laufzeit n unbeschränkt über alle Grenzen wachsen läßt ($\lim$), ausgerechnet werden, wobei man zweckmäßig die $\lim_{n \rightarrow \infty}$ bereits benutzte Gleichung

$${}_6p_o^{(n)} = \frac{r_o}{r_e} + \frac{1 - \frac{r_o}{r_e}}{(1+r_e)^n}$$

verwendet, die für

$${}_6p_o^{(n)} = 0,9855769 \quad \text{und} \quad r_o = 0,06 \quad \text{die Form}$$

$$0,9855769 = \frac{0,06}{r_e} + \frac{1 - \frac{0,06}{r_e}}{(1+r_e)^n}$$

annimmt.

Die (gemeinsame) Bestimmungsgleichung für $n=5,6,7$ und 16 lautet

$$0,9855769 = \frac{1 + 0,06 [(1+r_e)^n - 1] : r_e}{(1+r_e)^n}$$

Aus ihr errechnen sich nacheinander die folgenden Zahlenwerte für die genannten Effektivzinssätze.²⁾

Um feststellen zu können, wieweit diese Effektivzinssätze

1) Vgl. S. 53

2) Diese folgen auf der nächsten Seite und werden dort mit den entsprechenden - durch lineare Interpolation erhaltenen - Effektivzinssätzen verglichen.

als Lösungen ${}_6r_e^{(n)}$ der vorausgegangenen Bestimmungsgleichung n-ten Grades für r_e - also als Lösungen einer Gleichung 5. oder 6. oder 7. bzw. 16. Grades - von den Zahlenwerten abweichen, die sich aus den bereits bekannten

r_e -Werten ${}_6r_e^{(4)}$ und ${}_6r_e^{(8)}$, nämlich

$${}_6r_e^{(4)} = 0,0642025 \quad \text{und} \quad {}_6r_e^{(8)} = 0,063442,$$

durch das Verfahren der linearen Interpolation (bei $n=16$ Extrapolation) in der Weise bestimmen lassen, daß man zunächst den Interpolationswert ${}_6r_e^{(5)}$, dann mit Hilfe des "richtigen" ${}_6r_e^{(5)}$ und ${}_6r_e^{(8)}$ -Wertes den Interpolationswert ${}_6r_e^{(7)}$ usw. errechnet, werden beide r_e -Werte, (${}_6r_e^{(n)}$ und ${}_6r_e^{(\bar{n})}$) für die genannten Werte von n , nämlich $n = (4,5,6,7,8,16)$ einander gegenübergestellt.

Dieses Verfahren liefert für $n=5$ wegen

$$({}_6r_e^{(5)} - {}_6r_e^{(4)}) : ({}_6r_e^{(8)} - {}_6r_e^{(4)}) = 1 : 4$$

den Interpolationswert

$${}_6r_e^{(5)} = (0,0623442 - 0,0642025) \cdot \frac{1}{4} + 0,0642025 = 0,0637373$$

Mit Benutzung dieses Wertes von ${}_6r_e^{(5)}$ als Näherungswert für das "richtige" ${}_6r_e^{(5)}$ erleichtert man sich die Effektivzinssatzbestimmung (Lösung der Bestimmungsgleichung 5. Grades in r_e mit der "regula falsi") wesentlich.

Der "richtige" Zahlenwert für ${}_6r_e^{(5)}$ ist ${}_6r_e^{(5)} = 0,0634562$,

d.h. die Abweichung des Interpolationswertes

$${}_6r_e^{(5)} = 0,0637379 \quad \text{vom Sollwert beträgt} \quad 0,0002817$$

oder rund $3 \cdot 10^{-4}$.

Für ${}_6r_e^{(6)}$ erhält man den (Soll-)Wert ${}_6r_e^{(6)} = 0,0629604$.

(Der Interpolationswert bei der $({}_6r_e^{(5)}/{}_6r_e^{(8)})$ -Interpolation ist ${}_6r_e^{(6)} = 0,063456 + \frac{1}{3}(0,0623442 - 0,063456) = 0,0630854$).

Für ${}_6r_e^{(7)}$ findet man ${}_6r_e^{(7)} = 0,0626077$.

(Der Interpolationswert bei der $({}_6r_e^{(6)}/{}_6r_e^{(8)})$ -Interpolation ist ${}_6r_e^{(7)} = 0,0629604 + \frac{1}{2}(0,0623442 - 0,0629604) = 0,0626523$).

Für ${}_6r_e^{(16)}$ ergibt sich ${}_6r_e^{(16)} = 0,0614413$.

(Der Extrapolationswert bei der $({}_6r_e^{(7)}/{}_6r_e^{(8)})$ -Extrapolation ist ${}_6r_e^{(16)} = 0,0623442 - 8(0,0626523 - 0,0623442) = 0,0598794$).

Dieser Wert ist unbrauchbar, da er - wie sich gleich bei der Bestimmung von ${}_6r_e^{(\infty)}$ zeigen wird - unter dem Grenzwert ${}_6r_e^{(\infty)} = 0,060878$ liegt. Außerdem müßte, da $0,0598794$ auch unter dem Couponsatz $0,06$ liegt, der dazugehörige Kurs im Gegensatz zu der gemachten Annahme über 1 liegen.

Der $(n = \infty)$ -Effektivzinssatz (im Sinne der Limesbildung $n \rightarrow \infty$ bei der Laufzeit n) errechnet sich aus der Bestimmungsgleichung für $r_e^{(n)}$ in der oben genannten Form, also aus

$$0,9855769 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{0,06}{r_e} + \frac{1 - \frac{0,06}{r_e}}{(1+r_e)^n} \right)$$

$$\text{zu } \frac{0,06}{{}_6r_e^{(\infty)}} = 0,9855769, \text{ also } {}_6r_e^{(\infty)} = \frac{0,06}{0,9855769} = 0,060878.$$

Der Effektivzinssatz ${}_6r_e^{(n)}$ nimmt also für $n \rightarrow \infty$ nicht - wie man wegen der unbegrenzten Zahl der Wiederholungen des gleichen (Einperiodentermin-)Zinssatzes $r_5 = r_6 = r_7 \dots = r_n (= r_0) = 0,06$ (der als gegeben anzusehenden Zinssatzfolge r_i ($i=1, \dots, n$)) vermuten könnte - den Zahlenwert $0,06$ an, sondern den Zahlenwert $0,06 : 0,9855769$.

Sehr einfache Grenzwerte beim Übergang zu unendlich langen Laufzeiten ergeben sich, wenn man von Zinssatzfolgen r_i ($i=1, \dots, n$) ausgeht, die nur aus zwei von einander verschiedenen, aber sich ständig wiederholenden Einperiodenterminzinssätzen bestehen. Insbesondere gilt das für die sogenannten alternierenden Folgen

r_1, r_2, r_1, r_2 usw., bei denen man, wenn man für die r_i ($i=1, 2$) etwa die Größenbeziehung $r_1 < r_2$ annimmt (z.B. $r_1=0,03$; $r_2=0,05$), die steigend alternierende Folge (3,5,3,5 usw.) und die fallend alternierende Folge (5,3,5,3), die zusammen ein Permutationspaar¹⁾ bilden, unterscheiden kann.

Bei diesen Folgen besitzen die Quotienten $\frac{c^{(n)}}{\prod(n)}$ ²⁾ sowohl für endliche Werte von n als auch für $n \rightarrow \infty$ sehr einfache und leicht zu berechnende Zahlenwerte und damit auch die drei "charakteristischen Effektivzinssätze"³⁾ $r_e^{(n)}$, $r_{eo}^{(n)}$ und ${}_{\infty}r_e^{(n)}$ unter der Voraussetzung, daß $n=2m$ ist, also die alternierenden Folgen tatsächlich aus gleich viel Zinssätzen der einen und der anderen Art bestehen.

Für die $(r_o=0)$ -Effektivzinssätze $r_e^{(n)}$ (langfristiger Zinssatz $R^{(n)}$ der klassischen Erwartungstheorie oder sogenannter geometrischer Mittelwert r_g der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge) und für die "angepaßten"⁴⁾ Effektivzinssätze $r_{eo}^{(n)}$ gilt für $n=2m$ (wo m eine natürliche Zahl ist), daß beide für beliebiges m jeweils konstante Zahlenwerte besitzen.

Für die $(r_o=0)$ -Effektivzinssätze folgt das aus der an anderer Stelle dieser Arbeit angegebenen m -gliedrigen Gleichung⁵⁾

$$2\sqrt{1,03 \cdot 1,05} = 4\sqrt{1,03^2 \cdot 1,05^2} = 2m\sqrt{1,03^m \cdot 1,05^m},$$

unabhängig davon, welche der beiden alternierenden Folgen,

1) Vgl. Abschnitt II,6, S. 107 ff.

2) Vgl. Abschnitt II,4, S. 81 ff.

3)4) Vgl. Abschnitt II,5, S. 84

5) Vgl. insbesondere die Abschnitte II,4; II,5; II,6; III,1.

die man durch die Indizes 1 (steigend alternierende Folge) bzw. 2 (fallend alternierende Folge) unterscheiden kann, vorliegt, denn Vertauschung der beiden Zinssätze (3% und 5%), also auch der Zinsfaktoren 1,03 und 1,05, ändert die Radikanden der obigen Gleichung nicht.

Für die angepaßten Effektivzinssätze ist dagegen ebenso wie bei den $c^{(n)}$ -Werten eine unterschiedliche Bezeichnung

$r_{eo j}^{(n)}$ ($j=1,2$) bzw. $c_j^{(n)}$ ($j=1,2$) notwendig. Die obige

Behauptung $r_{eo j}^{(2)} = r_{eo j}^{(4)} = \dots r_{eo j}^{(2m)}$ ist also für die zwei möglichen Fälle $j=1$ und $j=2$ getrennt zu beweisen.

Bei der sukzessiven Berechnung von $c_j^{(2)}$, $c_j^{(4)}$, $c_j^{(2m)}$ ($j=1,2$) soll von der Definitionsgleichung von

$$c^{(n)} = 1 + (1+r_n) + (1+r_n)(1+r_{n-1}) + \dots + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots \dots \dots (1+r_2)$$

ausgegangen werden, die im Fall $n=2$ für die erste alternierende Folge die Summe $c_1^{(2)} = 1 + 1,05 = 2,05$, für die zweite dagegen die Summe $c_2^{(2)} = 1 + 1,03 = 2,03$ liefert.

Für $n=2m$ findet man dann für $c_1^{(2m)}$ die Summe

$$1 + 1,05 + 1,05 \cdot 1,03 + 1,05^2 \cdot 1,03 + 1,05^2 \cdot 1,03^2 + \dots + 1,05^m \cdot 1,03^{m-1},$$

die sich wie folgt umstellen läßt

$$1 + 1,05 \cdot 1,03 + 1,05^2 \cdot 1,03^2 + \dots + 1,05^{m-1} \cdot 1,03^{m-1} \\ + 1,05 + 1,05^2 \cdot 1,03 + 1,05^3 \cdot 1,03^2 + \dots + 1,05^m \cdot 1,03^{m-1}.$$

Die ersten m Glieder lassen sich, da sie nach Potenzen von $1,03 \cdot 1,05 = 1,0815$ fortschreiten, durch den Quotienten

$$\frac{1,0815^m - 1}{1,0815 - 1} = \frac{1,0815^m - 1}{0,0815}$$

ausdrücken, die restlichen m Glieder liefern nach Aus-

klammern von $1,05$ in der Klammer die gleiche Reihe

$1 + 1,05 \cdot 1,03 \dots + 1,05^{m-1} \cdot 1,03^{m-1}$ wie die m -ersten Glieder

Insgesamt läßt sich

$$c_1^{(2m)} = 1 + 1,05 + 1,05 \cdot 1,03 + \dots + 1,05^m \cdot 1,03^{m-1}$$

als Summe von $\frac{1,0815^m - 1}{0,0815}$ und $1,05 \cdot \frac{1,0815^m - 1}{0,0815}$,

also in der Form $\frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,05$ schreiben.

In analoger Weise läßt sich die Summe

$$c_2^{(2m)} = 1 + 1,03 + 1,03 \cdot 1,05 + \dots + 1,03^m \cdot 1,05^{m-1}$$

zunächst wieder so umstellen, daß die gleiche Potenzreihe

wie oben, also $\frac{1,0815^m - 1}{0,0815}$ entsteht, während die restlichen Glieder nach Ausklammern von 1,03 eben diese Potenzreihe liefern. Insgesamt läßt sich $c_2^{(2m)}$ also

als Summe von $\frac{1,0815}{0,0815}$ und $1,03 \cdot \frac{1,0815^m - 1}{0,0815}$, d.h. in

der Form $\frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,03$ schreiben.

Da der angepaßte Effektivzinssatz $r_{eoj}^{(n)} = r_{eoj}^{(2m)}$ ($j=1,2$)

durch

$$r_{eoj}^{(n)} = \frac{\Pi^{(n)} - 1}{c_j^{(n)}}$$

definiert ist, wo $\Pi^{(n)}$ für das Produkt $\prod_{i=1}^n (1+r_i)$ steht,

nimmt $\Pi^{(n)}$ bei alternierenden Folgen im Falle $n=2m$ die Form $(1+r_1)^m \cdot (1+r_2)^m$, im obigen Beispiel also die Form

$1,03^m \cdot 1,05^m = 1,0815^m$, und

$\Pi^{(n)} - 1$ folglich die Form $1,0815^m - 1$ an.

Daraus ergibt sich im Falle $j=1$ für $r_{eol}^{(2m)}$ ($m=1,2,\dots$) der Ausdruck

$$r_{eol}^{(2m)} = (\Pi^{(n)} - 1) : c_1^{(n)} = (1,0815^m - 1) : \frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,05,$$

der nach Kürzen durch $(1,0815^m - 1)$ in $r_{eol}^{(2m)} = \frac{0,0815}{2,05}$

für alle natürlichen m übergeht.

Ganz analog findet man für alle natürlichen m im Falle $j=2$ für $r_{eol}^{(2m)}$ den konstanten Wert $\frac{0,0815}{2,03}$.

Für die $(r_0=\infty)$ -Effektivzinssätze ergeben sich - wie in Abschnitt II,4 gezeigt werden wird - für $n = 2m \rightarrow \infty$

1) Vgl. Abschnitt II,5, S. 85

(m = natürliche Zahl) die Gleichungen

$$\begin{aligned} {}_{\infty}r_{ei}^{(\infty)} &= r_{eoi}^{(2)} \quad (i=1,2), \text{ also wegen} \\ r_{eoi}^{(2)} &= r_{eoi}^{(4)} = r_{eoi}^{(2m)} \quad (i=1,2) \quad \text{auch } {}_{\infty}r_{ei}^{(\infty)} = r_{eoi}^{(\infty)}. \end{aligned}$$

Vergleicht man die Definitionsgleichungen von $r_{eo}^{(n)}$ und ${}_{\infty}r_e^{(n)}$, also die Gleichungen für den angepaßten Effektivzinssatz (a) und den ($r_o = \infty$)-Effektivzinssatz (b), miteinander

$$a) \quad r_{eo}^{(n)} = \frac{\Pi^{(n)} - 1}{c^{(n)}} \quad \text{bzw.}$$

$$b) \quad \frac{(1 + {}_{\infty}r_e^{(n)})^n - 1}{{}_{\infty}r_e^{(n)}} \cdot \frac{1}{(1 + {}_{\infty}r_e^{(n)})^n} = \frac{c^{(n)}}{\Pi^{(n)}},$$

so erkennt man, daß die linke Seite von b) wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + {}_{\infty}r_e^{(n)})^n - 1}{(1 + {}_{\infty}r_e^{(n)})^n} = 1$$

für $n \rightarrow \infty$ in $\frac{1}{{}_{\infty}r_e^{(\infty)}}$ übergeht, sich also für

${}_{\infty}r_e^{(\infty)}$ (falls er existiert) ein Grenzwert

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi^{(n)}}{c^{(n)}}$ ergibt, der mit dem Grenzwert

$\lim_{n \rightarrow \infty}$ für $r_{eo}^{(n)}$ übereinstimmt.

Denn bildet man auf beiden Seiten von a) $\lim_{n \rightarrow \infty}$, so erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{eo}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi^{(n)} - 1}{c^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi^{(n)}}{c^{(n)}},$$

falls dieser Grenzwert existiert (was im Falle der alternierenden Zinssatzfolge (3,5,...) - wie gezeigt - zutrifft).

Sowohl $\Pi^{(i)}$ als auch $c^{(i)}$ wachsen beide mit n unbegrenzt gegen ∞ (unter der selbstverständlichen Voraus-

setzung, daß $r_i > 0$ ist), denn sowohl $\Pi^{(i)}$ ($i=1, \dots, n$) als auch $c^{(i)}$ ($i=1, \dots, n$) durchlaufen je eine für $n \rightarrow \infty$ unbeschränkt monoton steigende Folge

$$\Pi^{(1)} = (1+r_1)$$

$$\Pi^{(2)} = (1+r_1)(1+r_2)$$

.....

$$\Pi^{(n)} = (1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)$$

bzw.

$$c^{(1)} = 1$$

$$c^{(2)} = 1+(1+r_2)$$

$$c^{(3)} = 1+(1+r_3)+(1+r_3)(1+r_2)$$

.....

$$c^{(n)} = 1+(1+r_n)+(1+r_n)(1+r_{n-1})+\dots+(1+r_n)(1+r_{n-1})\dots(1+r_2);$$

der Quotient $\frac{\Pi^{(n)}}{c^{(n)}}$ stellt also an sich einen unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ dar.

Unter der Voraussetzung, daß der $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi^{(n)}}{c^{(n)}}$ existiert, gilt also allgemein $r_{eo}^{(\infty)} = {}_{\infty}r_e^{(\infty)}$, d.h. für unendlich lange Laufzeiten gehen angepaßter und $(r_o=\infty)$ -Effektivzinssatz in einander über.

1) für $n \rightarrow \infty$

3. Der Kurs in Abhängigkeit vom Couponsatz

Betrachtet man in der Kursformel für $r_o p_o^{(n)}$ den Couponsatz $r_o = x$ als unabhängige Variable, so erkennt man, daß der (Anfangs-)Kurs $x p_o^{(n)}$ eine lineare Funktion von $r_o = x$ ist, nämlich

II-3-1

$$x p_o^{(n)} = \frac{1+x \left[1 + (1+r_n) + \dots + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots (1+r_2) \right]}{\prod_{i=1}^n (1+r_i)} \quad 1)$$

wo der Begleitfaktor von $x = r_o$, d.h. der Ausdruck in der eckigen Klammer im Zähler des obigen Bruches, durch das Symbol $c^{(n)}$ abgekürzt werden soll.

Die Abhängigkeit des Kurses $p_o^{(n)}$ von x kann, da $x = r_o$ ist, zwar durch das Symbol $x p_o^{(n)}$ zum Ausdruck gebracht werden, doch erscheint es vorteilhaft (in Analogie zur Schreibweise $y = f(x)$ für die funktionale Abhängigkeit der Variablen y von der Variablen x) auch für $x p_o^{(n)}$ bei Betonung der Abhängigkeit des Kurses vom Couponsatz $x = r_o$ die Schreibweise $p_o^{(n)}(x)$ zu gebrauchen. Da es sich bei der Abhängigkeit des Kurses $p_o^{(n)}$ vom Couponsatz r_o um eine besonders einfache Beziehung (lineare Funktion) handelt, ist es zweckmäßig, die rechte Seite der obigen Gleichung in ein konstantes Glied und in ein von $x (= r_o)$ abhängiges Glied gemäß der Normalgleichung $y = mx + n$ einer Geraden zu zerlegen.

II-3-2

$$x p_o^{(n)} = p_o^{(n)}(x) = x \frac{c^{(n)}}{\prod_{i=1}^n (1+r_i)} + \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+r_i)}$$

Man erkennt, daß für couponfreie Wertpapiere, also für $x (= r_o) = 0$ sich der (Anfangs-)Kurs $p_o^{(n)}$ auf das konstante Glied

$$p_o^{(n)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+r_i)} \quad (i = 1, \dots, n),$$

1) Vgl. Abschnitt II,1 (Gleichung II-1-3), S. 42

dessen Nenner $\prod_{i=1}^n (1 + r_i)$ mit $\Pi^{(n)}$ abgekürzt werden soll, reduziert.

Der Couponsatz r_{01} soll dann an die gegebene Zinssatzfolge "angepaßt" heißen ($r_0 = r_{0e}$; d.h. r_0 erhält in diesem Falle noch zusätzlich zum "Index 0" den Zweitindex "e"), wenn der zu diesem Couponsatz zugehörige Kurs (ungequeter Kurswert) pari, also gleich $\underline{1}$ steht. Für den Couponsatz r_{0e} , also für den Couponsatz im Anpassungsfall, erhält man durch Auflösen der obigen Gleichung, in die man für $x=r_{0e}$ $p_0^{(n)}$ den Wert $\underline{1}$ einsetzt, nach $r_0 = x$ (statt nach $p_0^{(n)}$) den Ausdruck

$$r_{0e} = \left(1 - \frac{1}{\Pi^{(n)}}\right) \cdot \frac{\Pi^{(n)}}{c^{(n)}} = \frac{\Pi^{(n)} - 1}{c^{(n)}}.$$

Da allgemein die Einperiodenterminzinssätze als positiv und größer als 0 angenommen werden, ist der Faktor $\left(1 - \frac{1}{\Pi^{(n)}}\right)$ von $\frac{\Pi^{(n)}}{c^{(n)}}$ in der obigen Gleichung stets positiv.

Die Differenz $1 - \frac{1}{\Pi^{(n)}}$ kann man als Differenz des Parikurses $r_{0e} p_0^{(n)} = 1$ und des Kurses $p_0^{(n)} = \frac{1}{\Pi^{(n)}}$ auffassen, wo $p_0^{(n)}$ der zu $r_0 = 0$ gehörige Kurs ist.

Diese Differenz geht durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{\Pi^{(n)}}{c^{(n)}}$ in den angepaßten Effektivzins- (Coupon-)satz $r_{eo} (= r_{0e})^2$ über.

Stellt man die Funktion

$$p_0^{(n)}(x) = x \frac{c^{(n)}}{\Pi^{(n)}} + \frac{1}{\Pi^{(n)}}$$

1)2) Vgl. Abschnitt II,5: "Angepaßtheit des Effektivzins- (Coupon-)satzes und die charakteristischen Werte des Effektivzinssatzes", S. 84 ff.

graphisch in einem Orthogonalsystem dar, wobei der Couponsatz x ($= r_o$) als unabhängige Variable auf der x-Achse und der (Anfangs-)Kurs $p_o^{(n)}(x) = x p_o^{(n)}$ als abhängige Variable auf der y-Achse abgetragen wird, so wird der couponfreie Kurs

$${}_o p_o^{(n)} = p_o^{(n)}(0) = \frac{1}{\Pi(n)}$$

zahlenmäßig durch den Achsenabschnitt, den die obige Gerade auf der y-Achse abschneidet, ausgedrückt, während der Faktor von x , nämlich

$$\frac{c^{(n)}}{\Pi(n)} = m^{(n)},$$

das Steigungsmaß dieser Geraden veranschaulicht. Der Schnittpunkt dieser (Kurs-)Geraden mit der Parallelen zur x-Achse im Abstände 1 (Parikurs) wird umso später, d.h. bei umso höheren Couponsätzen $x = r_o$ erreicht, je kleiner das Steigungsmaß der Geraden, also des Quotienten $m^{(n)}$ ist.

Ist z.B. Fall a) $r_1 = 0,03$ und $r_2 = 0,05$

Fall b) $r_1 = 0,05$ und $r_2 = 0,03$,

so ist

$$\text{Fall a) } m_a^{(n)} = \frac{c_a^{(n)}}{\Pi(n)} = \frac{1 + 1,05}{1,03 \cdot 1,05} = 1,8955154$$

und

$$\text{Fall b) } m_b^{(n)} = \frac{c_b^{(n)}}{\Pi(n)} = \frac{1 + 1,03}{1,03 \cdot 1,05} = 1,8770226,$$

woraus sich für die angepaßten Couponsätze r_{oe} (die mit den jeweiligen angepaßten Effektivzinssätzen r_{eo} identisch sind) die Zahlenwerte

$$\text{Fall a) } (r_{oe})_a = \frac{\Pi(n) - 1}{c_a^{(n)}} = \frac{0,0815}{2,05} = 0,039756$$

bzw.

$$\text{Fall b) } (r_{oe})_b = \frac{\Pi(n) - 1}{c_b^{(n)}} = \frac{0,0815}{2,03} = 0,0401477 \text{ ergeben.}$$

Im Fall a) lautet also die Gleichung der (Kurs-)Geraden, die den Zusammenhang zwischen dem Kurs $p_o^{(n)}(x)$ und dem Couponsatz $r_o = x$ wiedergibt:

$$p_o^{(2)}(x) = x \frac{2,05}{1,0815} + \frac{1}{1,0815},$$

während die entsprechende Geradengleichung im Falle b)

$$p_o^{(2)}(x) = x \frac{2,03}{1,0815} + \frac{1}{1,0815}$$

lautet.

Beide Geraden schneiden also die $y (= p_o^{(n)})$ -Achse im Punkte $(0 / \frac{1}{1,0815})$. Sie schneiden dann die Parallele zur $x (= r_o)$ -Achse im Abstände $\frac{1}{1,0815}$, der dem Parikurs entspricht, in den Punkten $((r_{oe})_a / 1) = (0,039756 / 1)$ bzw. $((r_{oe})_b / 1) = (0,0401477 / 1)$, entsprechend ihren unterschiedlichen Anstiegen $m_a^{(2)} = 1,8955154$ bzw. $m_b^{(2)} = 1,8770226$.

Weitere Punkte der beiden Geraden $(p_o^{(2)}(x))_a$ bzw.

$(p_o^{(2)}(x))_b$ erhält man, wenn man etwa die "Randwerte"

$(r_1)_a = 0,03 = (r_2)_b$ bzw. $(r_2)_a = 0,05 = (r_1)_b$ als

Couponsatzwerte $x = r_{o1}$ bzw. $x = r_{o2}$ betrachtet und die zugehörigen Kurswerte berechnet.

Im Fall a) gehören zu diesen Randwerten (0,03 wird nachfolgend auch mit r_m , 0,05 mit r_M bezeichnet ¹⁾) die Kurswerte

$$\left({}_3p_o^{(2)} \right)_a = \frac{1 + 0,03 \cdot \frac{2,05}{1,0815}}{\frac{1,03}{1,0815}} = 0,981507$$

bzw.

$$\left({}_5p_o^{(2)} \right)_a = \frac{1 + 0,05 \cdot \frac{2,05}{1,0815}}{\frac{1,03}{1,0815}} = 1,0194174.$$

Berechnet man unter der Voraussetzung von Fall b), also bei der umgekehrten Zinssatzfolge (5%, 3%) der gegebenen Einperiodenterminzinssätze die Kurse, die sich für

$r_{o1} = r_m = (r_2)_b = 0,03$ bzw. $r_{o2} = r_M = (r_1)_b = 0,05$

ergeben, so findet man

1) r_m bedeutet den kleinsten (minimalen) r_M den größten (maximalen) Zinssatz der gegebenen Zinssatzfolge.

$$\left({}_5P_O^{(2)} \right)_b = \frac{1 + 0,05 \cdot 2,03}{1,03 \cdot 1,05} = 1,0184928$$

$$\left({}_3P_O^{(2)} \right)_b = \frac{1 + 0,03 \cdot 2,03}{1,03 \cdot 1,05} = 0,9809523.$$

Vergleicht man die Kursdifferenzen ${}_5P_O^{(2)} - {}_3P_O^{(2)}$ in den Fällen a) und b), also

$$\left({}_5P_O^{(2)} \right)_a - \left({}_3P_O^{(2)} \right)_a = 1,0194174 - 0,981507 = 0,0379104$$

bzw.

$$\left({}_5P_O^{(2)} \right)_b - \left({}_3P_O^{(2)} \right)_b = 1,0184928 - 0,9809523 = 0,0375405$$

mit der zugehörigen Couponsatzdifferenz $0,05 - 0,03 = 0,02$, so stellt man fest, daß die beiden ersteren um den Faktor

$$\frac{c_a^{(n)}}{\Pi(n)} = \frac{2,05}{1,0815} = 1,8955154$$

bzw.

$$\frac{c_b^{(2)}}{\Pi(2)} = \frac{2,03}{1,0815} = 1,8770226 \quad \text{kleiner sind als die letztere.}$$

Bei sinngemäßer Übertragung auf das Beispiel von Lutz (Zinssatzgruppe 5/6/8//5) mit $r_m = 0,05$ und $r_M = 0,08$ sind den "Rand"-Zinssätzen r_m bzw. r_M unter der Voraussetzung, daß die Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze 5, 6, 8 unverändert bleibt ¹⁾, folgende Kurswerte zugeordnet

$${}_5P_{01}^{(3)} = \frac{1 + 0,05 \cdot 3,2248}{1,20204} = 0,9660577$$

bzw.

$${}_8P_{01}^{(3)} = \frac{1 + 0,08 \cdot 3,2248}{1,20204} = 1,0465408.$$

1) Dies soll im Sinne des Abschnittes "Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze" als Fall 1) mit entsprechender Indizierung der Kurs- und Effektivzinssatzwerte bezeichnet werden.

Da zwischen den Kursen und Couponsätzen eine lineare Abhängigkeit besteht, muß dem maximalen (minimalen) r_o -Wert - bei gleicher Größe und Anordnung der als gegeben angesehenen Einperiodenterminzinssätze - auch ein maximaler (minimaler) Kurswert entsprechen, d.h. wenn man für die Kursdifferenz $p_o^{(n)}(r_M) - p_o^{(n)}(r_m)$ die Abkürzung $D_p(r_m, r_M)$ wählt, so kann man im Klammerausdruck - zwecks Vereinfachung der Schreibweise - auf den Buchstaben "r" verzichten. Statt $D_p(r_m, r_M)$ wird also das Symbol $D_p(mM)$ verwendet.

$$D_p(mM) = {}_8p_{ol}^{(3)} - {}_5p_{ol}^{(3)} = 1,0465408 - 0,9660572 = 0,080483$$

Natürlich kann man die Kursdifferenz $D_p(mM)$ auch allgemein aus der betreffenden "Kurs"-Geradengleichung, d.h. aus der Gleichung für $p_o^{(n)}(x)$ in Abhängigkeit von $x = r_o$ bestimmen

$$\begin{aligned} D_p(mM) &= r_M p_o^{(n)} - r_m p_o^{(n)} = r_M \frac{c^{(n)}}{\Pi(n)} + \frac{1}{\Pi(n)} - r_m \frac{c^{(n)}}{\Pi(n)} + \frac{1}{\Pi(n)} \\ &= (r_M - r_m) \frac{c^{(n)}}{\Pi(n)} = D_{r_o}^{(n)}(mM) \frac{c^{(n)}}{\Pi(n)}, \end{aligned}$$

wo $\frac{c^{(n)}}{\Pi(n)}$, wie bereits betont wurde, den Anstieg $m^{(n)}$ der "Kursgeraden" bedeutet.

Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte des obigen Beispiels, also der Werte $r_m = 0,05$; $r_M = 0,08$; $c^{(3)} = 3,2248$ und $\Pi^{(3)} = 1,20204$ ergibt für $D_p(mM)$ den Wert

$$D_p(mM) = 0,03 \cdot \frac{3,2248}{1,20204} = 0,03 \cdot 2,6827726 \approx 0,0804831,$$

also den gleichen Zahlenwert wie oben.

Um den "Spielraum" für den Effektivzinssatz $D_{r_e}(mM)$ unter der Voraussetzung zu ermitteln, daß der zugehörige

1) $D_{r_o}(mM)$ bedeutet r_o -Differenz $r_{o2} - r_{o1} = r_M - r_m$

Couponsatz r_o innerhalb des "Spielraums" (des r_o -Intervalles) $r_m \leq r_o \leq r_M$ liegt, genügt es, die Effektivzinssätze auszurechnen, die zu den Randkursen $r_{o1} = r_m$ bzw. $r_{o2} = r_M$ gehören.

Bei Verwendung des Beispiels von Lutz (Zinssatzgruppe 5/6/8//6) findet man für $r_1 = 0,05 = r_m$ als unteren Rand r_{o1} des r_o -Intervalls (0,05/0,08) den zugehörigen Kurswert $5P_o^{(3)} = 0,9660577$; der zugehörige effektive Zinssatz $r_e = 5r_e^{(3)}$ ist 0,062763. Zum Kurswert $8P_o^{(3)} = 1,0465408$ ($0,08 = r_{o2} = r_M$ ist der obere Rand des r_o -Intervalls (0,05/0,08)) gehört andererseits der r_e -Wert $8r_e^{(3)} = 0,0625077$.

Der Couponsatzdifferenz (dem r_o -Intervall)

$$D_{r_o}(\text{mM}) = 0,08 - 0,05 = 0,03$$

entspricht jetzt die Effektivzinssatzdifferenz (das r_e -Intervall)

$$D_{r_e}(\text{mM}) = 0,0627631 - 0,0625077 = 0,0002554,$$

d.h. beim Übergang vom r_o -Intervall zum zugehörigen r_e -Intervall tritt eine Verringerung der Differenz auf etwa $\frac{1}{120}$ ein.

Wie bereits gezeigt worden ist ¹⁾, ergibt sich im Falle einer Zinssatzfolge mit gleichbleibenden Zinssätzen r_i ($i = 1, \dots, n$) $= r$, z.B. $r = 6\%$, wenn der Couponsatz $r_o \neq r$, also etwa $r_o = r \pm \Delta$ ist (z.B. $r_o = 5\%$), eine Annäherung des Kurswertes $r_o P_o^{(n)} = 5P_o^{(n)}$ mit wachsender Laufzeit (n) an den Grenzwert $\frac{r_o}{r}$ (hier also an $\frac{0,05}{0,06} = \frac{5}{6}$), den man als Konsolkurs bezeichnen kann.

Die allgemeine Formel für diesen Fall lautet

1) Vgl. den Abschnitt "Kurs und Effektivzinssatz in Abhängigkeit von der Laufzeit", S. 48

$$r_o p_o^{(n)} = \frac{1 - \frac{r_o}{r}}{(1+r)^n} + \frac{r_o}{r}.$$

Die Annäherung an den Grenzwert $\frac{r_o}{r}$ (hier $\frac{5}{6}$) erfolgt - was ebenfalls bereits gesagt wurde ¹⁾ - asymptotisch, wobei in diesem Fall $r_o < r$ die Annäherung von oben erfolgt.

Wegen der linearen Abhängigkeit des Kurses vom Couponsatz (und umgekehrt) und dem positiven Vorzeichen von $m^{(n)} = \frac{c^{(n)}}{\Pi^{(n)}}$ in der Gleichung

$$p_o^{(n)}(x) = x \cdot \frac{c^{(n)}}{\Pi^{(n)}} + \frac{1}{\Pi^{(n)}}$$

muß bei einem der gegebenen Einperiodenterminzinssatzfolge r_i ($i = 1, \dots, n$) nicht angepaßten Couponsatz ($r_o \neq r_{oe}$) der Kurs $r_o p_o^{(n)}$ unter (über) pari liegen, wenn der Couponsatz r_o unter (über) dem angepaßten Couponzinssatz r_{oe} ($= r_{eo}$) ²⁾ liegt; für den Effektivzinssatz gilt Entsprechendes.

Verwendet man das Beispiel von Lutz (ohne den Couponsatz $r_o = 5\%$), so findet man als Bedingung für den Parikurs ($x p_o^{(3)} = 1$), daß der der gegebenen Zinssatzmenge (5/6/8) "angepaßte" Couponsatz r_{oe} , der der Gleichung

$$1 = \frac{1 + r_{oe} \cdot 3,2248}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} = \frac{1 + r_{oe} \cdot 3,2248}{1,20204}$$

genügen muß, den Wert

$$r_{oe} = \frac{1,20204 - 1}{3,2248} = 0,0626519$$

hat.

Ist also r_o größer als 6,26519%, so liegt der zugehörige Kurs über pari (d.h. $x p_o^{(3)} > 1$), ist r_o kleiner als 6,26519%, so liegt der zugehörige Kurs unter pari.

1) Vgl. den Abschnitt "Kurs und Effektivzinssatz in Abhängigkeit von der Laufzeit", S. 48

2) Für $x p_i^{(n)} < 1$ ist $r_e > r_{oe}$, für $x p_i^{(n)} > 1$ ist $r_e < r_{oe}$.

Aus einer gegebenen Zinssatzmenge r_i ($i = 1, \dots, n$) der Mächtigkeit n lassen sich unter der Annahme, daß alle n gegebenen Zinssätze voneinander verschieden sind $n!$ verschiedene Zinssatzfolgen bilden. Zu jeder dieser Folgen ist bei gegebenem Couponsatz $r_o \neq 0$ genau ein Kurs (ungequeter Kurswert) $r_o p_{oj}^{(n)}$, wo j eine ganz bestimmte der $n!$ verschiedenen Zinssatzfolgen bezeichnen soll ¹⁾, eindeutig zugeordnet. Nur im Falle $r_o = 0$, also bei couponfreien Wertpapieren, fallen die $n!$ Kurse ($j = 1, \dots, n!$) wegen

$$r_o p_{oj}^{(n)} = r_o \frac{c_j^{(n)}}{\prod(n)} + \frac{1}{\prod(n)} = o p_{oj}^{(n)} = o \frac{c_j^{(n)}}{\prod(n)} + \frac{1}{\prod(n)} = \frac{1}{\prod(n)}$$

zum $\{r_o = 0\}$ -Kurs $o p_o^{(n)} = \frac{1}{\prod(n)}$ zusammen (zeichnerisch ist das der Schnittpunkt aller $n!$ Kursgeraden

$$x p_{oj}^{(n)} = p_{oj}^{(n)}(x) = \frac{x \cdot c_j^{(n)}}{\prod(n)} + \frac{1}{\prod(n)},$$

die zur gleichen Zinssatzmenge r_i ($i = 1, \dots, n$) gehören, mit der $y (= p_o^{(n)})$ -Achse).

Z.B. gehört zur Zinssatzmenge (3/5), gleichgültig ob die Zinssatzfolge $r_1 = 0,03$; $r_2 = 0,05$ oder umgekehrt $r_1 = 0,05$; $r_2 = 0,03$ lautet, der eindeutig bestimmte Kurswert $\frac{1}{\prod(n)}$, oder ausführlich

$$\frac{1}{1,03 \cdot 1,05} = \frac{1}{1,0815} = 0,9246417.$$

Im Abschnitt II,6 werden die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze und der Begriff des "mittleren" (d.h. des arithmetisch gemittelten) Effektivzinssatzes r_{ea} untersucht,

1) Vgl. den Abschnitt "Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze", S. 97 ff.

der zu einer bestimmten Zinssatzmenge r_i ($i=1, \dots, n$) mit ihren (falls alle r_i voneinander verschieden sind) $n!$ verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten gehört. Ebenso lassen sich unter gleicher Voraussetzung (Verschiedenheit der gegebenen Zinssätze) zu jeder Zinssatzmenge r_i ($i = 1, \dots, n$), natürlich auch für jeden von 0 verschiedenen und gemäß allgemeiner Annahme positiven r_0 -Wert, $n!$ verschiedene Kurswerte ermitteln, aus denen man entsprechend einen mittleren (d.h. arithmetisch gemittelten) Kurs $p_{oa}^{(n)}$ bilden kann.

So erhält man beispielsweise für die Zinssatzgruppe (3/5//4), wenn der Kurs, der zu $r_1 = 0,03$; $r_2 = 0,05$, $r_0 = 0,04$ gehört, mit $4p_{o1}^{(2)}$ und der zu $r_1 = 0,05$; $r_2 = 0,03$, $r_0 = 0,04$ gehörige Kurs mit $4p_{o2}^{(2)}$ bezeichnet wird, mit Hilfe der $c_i^{(2)}$ -Werte ($i = 1, 2$) $c_1^{(2)} = (1 + 1,05) = 2,05$ und $c_2^{(2)} = (1 + 1,03) = 2,03$ sowie des $\Pi^{(2)}$ -wertes $1,03 \cdot 1,05 = 1,0815$ folgende Kurswerte

$$4p_{o1}^{(2)} = \frac{1 + 0,04 \cdot 2,05}{1,0815} = 1,0004623$$

bzw.

$$4p_{o2}^{(2)} = \frac{1 + 0,04 \cdot 2,03}{1,0815} = 0,9997226.$$

Daraus ergibt sich ein "mittlerer" (zu $r_0 = 0,04$) gehöriger Kurs $4p_{oa}^{(2)}$ von $\frac{1,0004623 + 0,9997226}{2} = 1,0000924$.

Es erscheint sinnvoll, diesen Kurs als charakteristisch für die gegebene Zinssatzgruppe (3/5//4) anzusehen. Die Feststellung, daß dieser Kurs über pari liegt, dürfte mit der Tatsache zusammenhängen, daß sich für die angepaßten Couponzinssätze im 1. Fall (Zinssatzfolge 3/5) der Wert 0,039756 ($= r_{oe1}$), im 2. Fall (Zinssatzfolge 5/3) der Wert 0,0401477 ($= r_{oe2}$), also insgesamt ein mittlerer angepaßter Couponsatz r_{oea} von 0,0399518 ergibt, der zwar fast genau mit dem $r_g = R^{(3)}$ -Wert 0,0399519 übereinstimmt, aber doch ein wenig kleiner ist als dieser.

4. Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Couponsatz

Der effektive Zinssatz r_e hängt außer von der Anordnung der Einperiodenterminzinssätze ¹⁾ r_i ($i = 1, \dots, n$) auch noch von der Höhe des Couponsatzes r_o ²⁾ ab.

Wie im folgenden noch zu zeigen sein wird, erscheint es sinnvoll und zweckmäßig, bei der Betrachtung der Abhängigkeit des effektiven Zinssatzes vom Couponsatz die gegebene Reihenfolge der Zinssätze zunächst unverändert zu lassen.

Bezeichnet man unter der Voraussetzung einer bestimmten (gegebenen) Folge von Einperiodenterminzinssätzen $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ den Couponsatz r_o mit x , d.h. betrachtet man den Couponsatz als unabhängige Variable, den Effektivzinssatz r_e als abhängige Variable, so erhält man für $p_o^{(n)}$ als Funktion von x die bereits bekannte Gleichung ³⁾

II-4-1

$$p_o^{(n)}(x) = \frac{1 + x \cdot (1 + y_n + y_n \cdot y_{n-1} + \dots + y_n \cdot y_{n-1} \cdot \dots \cdot y_2)}{\prod_{i=1}^n y_i} = \frac{1 + x \cdot c^{(n)}}{\prod^{(n)}}$$

wo entsprechend der unten bei $\overline{p_o^{(n)}}$ gewählten Abkürzung (y für $1+r_e$) für die Zinsfaktoren $1+r_i$ das Symbol y_i verwendet worden ist.

Entsprechend erhält man für $\overline{p_o^{(n)}}$ als Funktion des Effektivzinssatzes r_e , wenn man für den Zinsfaktor $1+r_e$ die Abkürzung y benutzt, den Ausdruck

II-4-2

$$\overline{p_o^{(n)}}(x, y) = \frac{1 + x \cdot \frac{y^n - 1}{y - 1}}{y^n} \quad 4)$$

1) Die Abhängigkeit wird im Abschnitt "Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze" behandelt, S. 97 ff.

2) Nur wenn die Zinssatzfolge der Einperiodenterminzinssätze aus ein und demselben Zinssatz $r_1=r_2, \dots, r_n$ besteht, ist der Effektivzinssatz r_e von der Höhe des Couponsatzes r_o unabhängig.

3) Vgl. den Abschnitt "Der Kurs in Abhängigkeit vom Couponsatz", Gleichung II-3-1, S. 63

4) Vgl. den Abschnitt II,1, Gleichung II-1-2, S. 40

$\overline{p}_0^{(n)}$ hängt sowohl vom Couponsatz $r_0 = x$ als auch vom Zinsfaktor $1 + r_e = y$ ab.

Die Gleichsetzung (Elimination) von $\overline{p}_0^{(n)}$ und $\overline{p}_0^{(n)}$ liefert dann die Gleichung für den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Couponsatz $r_0 (= x)$ und dem zum effektiven Zinssatz r_e gehörigen Zinsfaktor $y = (1+r_e)$.

Die durch die Elimination der Zwischenvariablen entstehende implizite Gleichung der beiden Variablen x und y läßt sich verhältnismäßig einfach nach der Variablen x auflösen. Diese nach x aufgelöste Gleichung bezeichnet man auch als x -explizite Gleichung.

Wollte man die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes $r_e = y - 1$ oder des Couponsatzes $r_0 = x$ von der Laufzeit n auch noch berücksichtigen, so würde dies die Darstellung der funktionalen Abhängigkeit der Variablen x und y bzw. r_e und r_0 voneinander sehr erschweren. Es wird daher (zunächst) angenommen, daß die Zinssätze r_i ($i = 1, \dots, n$) sowohl hinsichtlich ihrer Anzahl, durch die die Laufzeit n "mit" bestimmt ist, wie hinsichtlich ihrer Anordnung ¹⁾ fest vorgegeben sind; n und $y_i = 1 + r_i$ ($i=1, \dots, n$) sind also keine Variablen, sondern Konstante.

Die Auflösung der obigen Gleichungen nach x (Couponsatz) liefert folgenden Ausdruck

$$x = (y-1) \frac{y^n - \prod_{i=1}^n y_i}{y^n \left[\prod_{i=1}^n y_i - (1+y_n+y_{n-1}y_{n-1}+\dots+y_n \cdot y_{n-1} \cdot y_2)(y_{-1}) \right] - \prod_{i=1}^n y_i} \quad 2)$$

Man erkennt aus dieser ³⁾ Darstellung, daß x eine gebrochen rationale Funktion von y ist, und zwar formal vom

1) Vgl. den Abschnitt "Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze", S. 97

2) Vgl. Abschnitt II,1, Gleichung II-1-6a, S. 44

3) Eine andere Darstellung (ohne Lücke), bei der Zähler und Nenner beide vom Grade n sind, findet sich auf der folgenden Seite.

$n+1$, in Wirklichkeit aber nur vom n -ten Grade im Zähler wie im Nenner.

Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite der obigen Gleichung verschwinden ersichtlich für $y = 1$. Für den Zähler ergibt sich das aus dem Linearfaktor $(y-1)$. Da das 2. Glied der eckigen Klammer im Nenner den Linearfaktor $(y-1)$ besitzt, ergibt sich diese Tatsache daraus, daß der Rest des Nenners

$$y^n \left(\prod_{i=1}^n y_i \dots \right) - \prod_{i=1}^n y_i$$

nach Ausklammern von $\prod_{i=1}^n y_i$ in $\prod^{(n)} (y^n - 1)$ übergeht, wo für $\prod_{i=1}^n y_i$ die Abkürzung $\prod^{(n)}$ gewählt worden ist,

die ebenfalls den Linearfaktor $(y-1)$ besitzt. Somit hat x als Funktion von y an der Stelle $y=1$ eine Lücke, die aber nur dadurch zustandegekommen ist, daß der ursprüngliche Ausdruck für x nämlich

II-4-3a

$$x = \frac{y^n - \prod^{(n)}}{\frac{y^n - 1}{y - 1} \cdot \prod^{(n)} c^{(n)} y^{(n)}}$$

mit $(y-1)$ erweitert wurde, wo $c^{(n)}$ für $1 + y_n + y_n \cdot y_{n-1} + \dots + y_n \cdot y_{n-1} \dots y_2$ steht.

Da das Verschwinden des 1. Faktors im Zähler von II-4-3 für die Frage nach den Nullstellen des Zählers nur eine unzulässige Lösung $y = 1$ liefert, ist der 2. Faktor und sein Verschwinden allein für die Nullstellen des Zählers maßgebend.

$y^n - \prod_{i=1}^n y_i = 0$ oder $y^n = \prod_{i=1}^n y_i$ hat aber nur eine einzige (positiv) reelle Nullstelle; d.h. von den n Lösungen (Nullstellen des Zählers) y_{z_1} ($i=1, \dots, n$) ist nur eine einzige, etwa y_{z_1} (y_{z_1} soll die positiv reelle

Nullstelle der obigen Gleichung sein) eine sinnvolle Lösung des Problems.

Diese Lösung y_{z_1} läßt sich in der Form

$$y_{z_1} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n y_i}$$

schreiben, was nach der Definition von $y = 1 + r_e$ bzw. $y_i = 1 + r_i$ die schon bekannte Lösung $r_e = r_g = R^{(n)}$, nämlich

$$r_e = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n y_i} - 1 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1+r_i)} - 1$$

liefert. Daß $r_e = R^{(n)}$ zur einzigen positiv reellen Nullstelle y_{z_1} der Gleichung II-4-3 gehört, d.h. daß der effektive Zinssatz r_e im Falle $r_0 = 0$ entsprechend der Definition des langfristigen Zinssatzes $R^{(n)}$ der klassischen Erwartungstheorie sich in der Form

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)} - 1$$

schreiben läßt, stellt eine Bestätigung eines bereits früher mehrfach festgestellten Sachverhaltes dar.

Im Falle des couponfreien Wertpapiers, d.h. eines Wertpapiers, bei dem Gesamtfälligkeit i.e.S. gilt, erhält man für $r_e = ({}_0r_e^{(n)})$ den gleichen mit $R^{(n)}$ übereinstimmenden Ausdruck. Gleichzeitig stellt dieser Ausdruck im Sinne der indirekten Mittelwertbildung ¹⁾ einer gegebenen Zinssatzmenge den indirekten (oder "sogenannten") geometrischen Mittelwert der Menge r_i ($i=1, \dots, n$) der gegebenen Einperiodenterminzinssätze dar.

Bei der Untersuchung des Bruches (gebrochen rationale Funktion) auf der rechten Seite der Gleichung II-4-3 wurde bereits festgestellt, daß diese gebrochen rationale Funktion an der Stelle $y = 1$ eine Lücke hat. $y = 1$ ist somit weder eine echte Nullstelle des Zählers, noch eine echte Nullstelle (Polstelle) des Nenners; beide sind vielmehr nur "formal" vom $n+1$ -ten Grade.

1) Vgl. den Abschnitt "Arten der Mittelwertbildung", S. 115 ;

Da $y = 1$ nicht zum Definitionsbereich von II-4-3 gehört, kann die rechte Seite von II-4-3 durch $y-1$ gekürzt werden, wodurch II-4-3 in die Form II-4-3a

$$x = \frac{y^n \cdot \prod^{(n)} \quad 1)}{(y^n - 1) \cdot \prod^{(n)} - c^{(n)} \cdot y^n} \quad 1)$$

übergeht, wenn man die zuvor eingeführte Abkürzung benutzt.

Aus dem Charakter der Funktion II-4-3a (gebrochen rationale Funktion) ergibt sich, daß x an den Polstellen (Nullstellen des Nenners dieser Funktion) gegen ∞ geht. Bezeichnet man die n Polstellen, die man als Nullstellen des Nenners der obigen Funktion, also als Lösungen der Bestimmungsgleichung

$$\frac{y^n - 1}{y - 1} \prod^{(n)} - c_j^{(n)} \cdot y^n = 0 \quad (j=1, \dots, n!) \quad 2)$$

erhält, mit y_{N_i} ($i=1, \dots, n$), wobei mit y_{N_1} (wie bei y_{z_1}) die (positiv) reelle Lösung gekennzeichnet werden soll, so findet man, daß dem Bereich aller positiven r_o -Werte einschließlich dem Wert $r_o=0$ ein verhältnismäßig enger Bereich "sinnvoller" r_e -Werte zugeordnet ist. Der reelle y_{N_1} -Wert soll wegen seines "Grenzcharakters" ($r_o \rightarrow \infty$) die Bezeichnung $_{\infty}y$, der zugehörige r_e -Wert $_{\infty}r_e$ erhalten.

Ein einfacherer Weg zur Ableitung der obigen Gleichung II-4-3a ergibt sich aus der Tatsache, daß beim Übergang zu sehr großen Werten von r_o ($\lim_{r_o \rightarrow \infty}$) die Summanden $\frac{1}{r_o}$ in den Zählern der beiden Seiten der Bestimmungsgleichung für r_e , nämlich

1) Vgl. Abschnitt II,1, Gleichung II-1-6, S. 44

2) Der Index j bei $c_j^{(n)}$ soll eine bestimmte Anordnung der Zinssätze r_i ($i=1, \dots, n$) der gegebenen Zinssatzfolge bedeuten, von denen es, wenn alle n Zinssätze voneinander verschieden sind, $n!$ (z.B. im Falle $n=3$ insgesamt 6) gibt. Dabei soll $j=1$ jeweils die ursprüngliche Zinssatzfolge bezeichnen.

$$\frac{1 + r_o \cdot c^{(n)}}{\Pi^{(n)}} = \frac{1 + r_o \cdot [(1+r_e)^n - 1] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

immer bedeutungsloser werden.

Für sehr große r_o -Werte können also die beiden Einsen fortgelassen werden, wodurch diese Gleichung (nach Kürzen durch r_o) in

$$\frac{c^{(n)}}{\Pi^{(n)}} = \frac{[(1+r_e)^n - 1] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

übergeht. Dieser Ausdruck ist offenbar mit der Gleichung II-4-4 identisch, wenn man $1+r_e$ durch y ersetzt.

Für das Beispiel von Lutz ergeben sich danach für

$o_r^{(3)}$ bzw. $\infty_r^{(3)}$ die folgenden Zahlenwerte

$$o_r^{(3)} = R^{(3)} (=r_g) = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} - 1 = 0,0632604$$

$$\text{und } \infty_r^{(3)} = 0,05803224.$$

Der $\infty_r^{(3)}$ -Wert ergibt sich als (einzige) positiv reelle Lösung der Bestimmungsgleichung

$$\frac{y^3 - 1}{y - 1} \cdot \Pi^{(3)} = c_j^{(3)} \cdot y^3,$$

wobei in $c_j^{(3)}$ der Index $j=1$ die (ursprüngliche) Reihenfolge (5,6,8) der Einperiodenterminzinssätze

r_1, r_2, r_3 des Beispiels von Lutz bedeutet, $c_1^{(3)}$ also den Wert $(1 + 1,08 + 1,08 \cdot 1,06) = 3,2248$ hat und

$\Pi^{(3)}$ für $\prod_{i=1}^3 (1+r_i) = 1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08$ steht.

$Y_{N_1} = \infty Y^{(3)} = 1,05803224$ ist die einzige reelle Lösung der obigen Gleichung 3. Grades in y .

Man erkennt, daß für die effektiven Zinssätze r_e (bzw. die zugehörigen Zinsfaktoren) bei gegebener Zinssatzfolge r_i ($i=1, \dots, n$) nur ein kleiner Spielraum praktisch bedeutungsvoller, also "sinnvoller" r_e -Werte vorhanden ist, nämlich der Spielraum (sinnvolles r_e -Intervall), der sich für r_e ergibt, wenn man x ($=r_o$) den Wertebereich der Couponsätze von $x=0$ bis $x=\infty$ durchlaufen läßt.

Würde man umgekehrt für r_e einen Zahlenwert außerhalb dieses "sinnvollen r_e -Bereiches", also im Falle des obigen Beispiels einen Wert

größer ${}_{\infty}r_e^{(3)} = 0,0632604$ (z.B. 0,064) bzw.

kleiner ${}_{\infty}r_e^{(3)} = 0,05803224$ (z.B. 0,57)

annehmen, so ergibt sich im 1. Fall gemäß der Gleichung

$$\frac{1 + x(1,064^3 - 1): 0,064}{1,064^3} = \frac{1 + x \cdot 3,2248}{1,20204} \quad \text{für } x \text{ der Wert}$$

$$x_1 = \frac{1,20204 - 1,2045501}{3,2248 \cdot 1,2045501 - 3,1960933 \cdot 1,20204} < 0,$$

(Nenner positiv, Zähler negativ)
im 2. Fall gemäß

$$\frac{1 + x(1,057^3 - 1): 0,057}{1,057^3} = \frac{1 + x \cdot 3,2248}{1,20204} \quad \text{für } x \text{ der Wert}$$

$$x_2 = \frac{1,1809321 - 1,20204}{3,1742473 \cdot 1,20204 - 3,2248 \cdot 1,1809321} < 0.$$

(Nenner positiv, Zähler negativ)

Wie erstaunlich gering die Breite des Effektivzinssatzintervalles $D_r(0/\infty)^1$ i.a. ist, erkennt man bei Benutzung der Werte des Beispiels von Lutz

$D_{r_e}(0/\infty) = 0,0632604 - 0,05803224 = 0,0052282$, also
rund 0,523%.

Die relative Breite, die durch das Verhältnis $\frac{o^y_e - {}_{\infty}y_e}{o^y_e}$ bestimmt wird, beträgt somit

$$\frac{0,00523}{0,0632604} = 0,0826741, \text{ also etwa } 8,3\%.$$

Nach Anmerkung 2 (S.73 von II,4) ist im Falle r_i ($i = 1, \dots, n$) = r , d.h. wenn alle Einperiodenterminzinssätze untereinander gleich sind, der Effektivzinssatz vom Couponsatz unabhängig, oder anders ausgedrückt, der Effektivzinssatz hat für jeden beliebigen positiven Couponsatz r_o ($0 \leq r_o < \infty$) den gleichen Wert. Dieser Wert kann nur gleich r sein, denn aus

$$1) D_{r_e}(0/\infty) \stackrel{\text{Def.}}{=} o^r_e - {}_{\infty}r_e$$

$$\frac{1 + c^{(n)} \cdot r_o}{\Pi^{(n)}} = \frac{1 + r_o [(1+r_e)^n - 1] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

folgt mit $\Pi^{(n)} = \prod_{i=1}^n (1+r_i) = (1+r)^n$

und $c^{(n)} = 1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^n = \frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r}$

die Gleichung

$$\frac{1 + r_o [(1+r)^n - 1] : r}{(1 + r)^n} = \frac{1 + r_o [(1+r_e)^n - 1] : r_e}{(1 + r_e)^n},$$

wobei die beiden Seiten sich lediglich im Index von r unterscheiden. $r = r_e$ ist also - unabhängig von der Größe von r_o - eine Lösung dieser Gleichung.

Umgekehrt läßt sich sagen, daß in diesem Falle r_i ($i = 1, \dots, n$) = r das sogenannte "sinnvolle" r_e -Intervall auf die Länge 0 zusammenschrumpft, was die Vermutung nahelegt, daß bei gleicher Laufzeit (n) die Länge des sinnvollen r_e -Intervalles mit der Größe des Spielraumes $r_M - r_m$ der gegebenen Einperiodenterminzinssätze zunimmt.

Tatsächlich findet man für das besonders einfache Beispiel $n = 2$ mit der Zinssatzfolge $(3/4)$ ein r_e -Intervall

$$D_{r_e}(0/\infty) = {}_0r_e^{(2)}(3/4) - {}_\infty r_e^{(2)}(3/4) = 0,0349879 - 0,0332824 = 0,0017055.$$

Bei Erweiterung des Grundintervalles von 1% auf 2%

a) nach unten $(2/4)$

b) nach oben $(3/5)$

ergeben sich folgende r_e -Intervalle

$$a) D_{r_{e,a}}(0,\infty) = {}_0r_e^{(2)}(2/4) - {}_\infty r_e^{(2)}(2/4) = 0,0299514 - 0,0265507 = 0,0034007$$

$$b) D_{r_{e,b}}(0,\infty) = {}_0r_e^{(2)}(3/5) - {}_\infty r_e^{(2)}(3,5) = 0,0399519 - 0,0365296 = 0,0034223.$$

Wie man sieht, verdoppelt sich etwa die Länge des sinnvollen r_e -Intervalles, wenn man das r_o -Intervall, d.h. das Intervall (r_m/r_M) der Einperiodenterminzinssätze von

$$D_{r_o}(mM) = 0,01 \quad \text{auf} \quad D_{r_o}(mM) = 0,02 \quad \text{erweitert.}$$

Allerdings spielt neben der Länge des r_o -Intervalles offenbar auch seine (relative) Lage eine Rolle, wie die deutliche Zunahme der Länge des r_e -Intervalles von

$$D_{r_e,a} = 0,0034007 \quad \text{auf} \quad D_{r_e,b} = 0,0034223 \quad \text{beweist.}$$

Es zeigt sich nun, daß das sogenannte sinnvolle Effektivzinssatzintervall außer von der Länge und Lage des r_i -Intervalles (r_m, r_M) auch - wenn man etwa eine alternierende Zinssatzfolge von 2 Zinssätzen z.B. 0,03; 0,05; 0,03; 0,05 usw. annimmt - von der Länge der Laufzeit abhängt, und zwar tritt mit wachsender Laufzeit eine Verengung des sinnvollen r_e -Bereiches ein.

Für $n=2$, also die Zinssatzfolge (3/5), wurden die Werte von

$${}_o r_e^{(2)} = 2\sqrt{1,03 \cdot 1,05} - 1 = 0,0399519$$

und

$${}_{\infty} r_e^{(2)} = 0,0365296 \quad \text{und ihre Differenz}$$

$$D_{r_e}^{(2)}(0, \infty) = 0,0034223$$

bereits angegeben.

Geht man bei der Untersuchung der Abhängigkeit von $D_{r_e}^{(n)}(0, \infty)$ von n so vor, daß man n die Potenzen von 2 durchlaufen läßt, so ist ${}_o r_e^{(2)} = {}_o r_e^{(4)}$ usw. konstant, da

$$2\sqrt{1,03 \cdot 1,05} = 4\sqrt{1,03^2 \cdot 1,05^2} = 8\sqrt{1,03^4 \cdot 1,05^4} \quad \text{usw. ist.}$$

Es genügt also zur Berechnung der Länge des sinnvollen r_e -Intervalles, den $(r_o = \infty)$ -Effektivzinssatz ${}_{\infty} r_e^{(n)}$ für $n=2, 4, \dots$ allgemein $2m$ zu ermitteln.

${}_{\infty} r_e^{(4)}(3,5; 3,5)$ erhält man als Lösung der Gleichung

1) $D_{r_e}^{(2)}(0, \infty)$ bedeutet die r_e -Differenz $D_{r_e}(0, \infty)$ bei einer Laufzeit von $n=2$ Zinsperioden, also bei einer Zinssatzfolge r_i ($i=1, 2$).

$$\frac{y^4 - 1}{(y-1)y^4} = \frac{c^{(4)}}{\Pi^{(4)}}$$

mit

$$\Pi^{(4)} = 1,03^2 \cdot 1,05^2 = 1,0815^2$$

und

$$c^{(4)} = 1 + 1,05 + 1,05 \cdot 1,03 + 1,05^2 \cdot 1,03 = \frac{1,0815^2 - 1}{0,0815} \cdot 2,05 = 4,2670735.$$

Aus

$$\frac{y^4 - 1}{(y-1)y^4} = \frac{4,2670735}{1,1696422} = 3,6481870$$

folgt

$${}_{\infty}y^{(4)} = 1 + {}_{\infty}r_e^{(4)} = 1,0378702.$$

Das ergibt eine r_e -Differenz von

$$D_{r_e}^{(4)}(0, \infty) = 0,0399519 - 0,0378702 = 0,0020817.$$

${}_{\infty}r_e^{(8)}(3,5,3,5,3,5,3,5)$ bestimmt man mittels der Gleichung

$$\frac{y^8 - 1}{(y-1)y^8} = \frac{c^{(8)}}{\Pi^{(8)}} \quad ,$$

wo

$$\Pi^{(8)} = 1,03^4 \cdot 1,05^4 = 1,0815^4 = 1,3680628$$

und

$$c^{(8)} = 1 + 1,05 + 1,05 \cdot 1,03 + \dots + 1,05^4 \cdot 1,03^3 = \frac{1,0815^4 - 1}{0,0815} \cdot 2,05 = 9,25802111$$

ist.

Aus

$$\frac{y^8 - 1}{(y-1)y^8} = \frac{9,2580211}{1,3680628} = 6,7672486$$

folgt

$${}_{\infty}y_e^{(8)} = 1 + {}_{\infty}r_e^{(8)} = 1,0387637$$

$${}_{\infty}r_e^{(8)} = 0,0387637.$$

Das ergibt eine r_e -Differenz von $D_r^{(8)}(0/\infty) = 0,0011882.$

Allgemein folgt aus $n=2m$ mit $\Pi^{(n)} = \Pi^{(2m)} = 1,0815^m$ 1)
und $c^{(n)} = \frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,05$ für $\frac{c^{(n)}}{\Pi^{(n)}}$ der Quotient

$$\frac{(1,0815^m - 1) \cdot 2,05}{0,0815 \cdot 1,0815^m},$$

der mit n (bzw. m) $\rightarrow \infty$ gegen $\frac{2,05}{0,0815}$ konvergiert.

Andererseits geht für n (bzw. m) $\rightarrow \infty$ der Quotient

$$\frac{y^n - 1}{(y - 1) y^n} \text{ in } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y^n}\right) \frac{1}{y-1} = \frac{1}{y-1} \text{ über.}$$

Da der angepaßte Effektiv(=Coupon-)Zinssatz $r_{eo}^{(2)}$ 2)

durch $\frac{\Pi^{(2)} - 1}{c^{(2)}}$, also durch $\frac{1,0815 - 1}{2,05}$ festgelegt ist,

stimmen ${}_0 r_e^{(\infty)} = \frac{0,0815}{2,05}$ und $r_{eo}^{(2)}$ überein.

Für den obigen Fall ($r_1 = r_m$; $r_2 = r_M$; $r_3 = r_m$; $r_4 = r_M$ usw.)

ist also festzustellen, daß das sinnvolle r_e -Intervall mit wachsendem n zwar abnimmt, aber nicht auf den Wert 0 (der nur für r_i ($i = 1, \dots, n$) = konstant gilt), sondern

asymptotisch auf den Wert ${}_0 r_e^{(\infty)} - {}_\infty r_e^{(\infty)} = {}_0 r_e^{(2)} - r_{eo}^{(2)}$,

also im numerischen Beispiel

$$r_1 = 0,03, r_2 = 0,05 \text{ usw. auf } 0,0399519 - 0,039756.$$

1) $\Pi^{(n)} = 1,03^m \cdot 1,05^m = 1,0815^m$

2) Vgl. Abschnitt II,5, S. 84 ff.

5. Angepaßtheit des Effektivzins-(Coupon-)satzes und die charakteristischen Werte des Effektivzinssatzes

An mehreren Stellen dieser Arbeit, so auch am Schluß des vorhergehenden Abschnittes, wurde schon der Begriff angepaßter Effektivzinssatz bzw. angepaßter Couponsatz verwendet und auf die Identität beider Begriffe hingewiesen. Tatsächlich stellt der angepaßte Effektivzinssatz neben dem Effektivzinssatz für couponfreie Wertpapiere ($r_o = 0$) und dem ($r_o = \infty$)-Effektivzinssatz (${}_{oo}r_e^{(n)}$) einen Effektivzinssatz mit besonders interessanten Eigenschaften dar.

Vom Begriff Angepaßtheit in bezug auf den Couponsatz r_o war bereits kurz zu Beginn des Abschnittes "Der Kurs in Abhängigkeit vom Couponsatz" die Rede und auch davon, daß der Couponsatz r_o im Anpassungsfalle den Zweitindex e ($r_o = r_{oe}$) erhalten sollte.

Geht man von der Bestimmungsgleichung des Effektivzinssatzes r_e unter der Voraussetzung einer gegebenen Einperiodenterminzinssatzfolge r_i ($i=1, \dots, n$) aus, also auch einer gegebenen Laufzeit n , indem man die rechten Seiten der beiden Gleichungen für den gequerten und ungequerten Kurs gleichsetzt, so stellt diese Gleichung, solange noch nicht über die Höhe des Couponsatzes r_o verfügt worden ist, eine Gleichung mit zwei Variablen r_o und r_e dar. Bei Gleichsetzung von r_o und r_e geht also diese Gleichung in eine Bestimmungsgleichung für den mit seinem zugehörigen Couponsatz identischen $r_o = r_{eo} = r_e$ Effektivzinssatz über.

Nun muß aber der gequerte Kurs, wenn man in dem Ausdruck

$${}_{oe} \overline{p_o^{(n)}} = \frac{1 + r_{oe} \left[(1 + r_{eo})^n - 1 \right] : r_{eo}}{(1 + r_{eo})^n}$$

den Couponsatz

$$r_{oe} = r_{eo} = x$$

setzt - unabhängig von der Größe von $x^{1)}$ mit Notwendigkeit den Wert 1 annehmen, d.h. $\frac{1}{p_o^{(n)}}$ und damit $p_o^{(n)}$ wird zum Parikurs.

Das bedeutet aber für die Bestimmung von $r_{eo} = r_{oe}$, daß die Gleichung $p_o^{(n)} = 1$ außer dem Couponsatz r_o wegen der als bekannt angenommenen Einperiodenterminzinssatzfolge keine weiteren Variablen enthält, die Gleichung also zur eindeutigen Bestimmung von $r_o = r_{oe} = x$ ausreicht. Mit den schon mehrfach benutzten Abkürzungen

$$\prod_{i=1}^n (1 + r_i) = \Pi^{(n)}$$

bzw.

$$c^{(n)} = 1 + (1+r_n) + (1+r_n)(1+r_{n-1}) + \dots + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots (1+r_2)$$

geht die ungequerte Kursgleichung als Bestimmungsgleichung für den "angepaßten" Coupon-(angepaßten Effektiv-)Zinssatz dann in die Form

$$p_o^{(n)} = 1 = \frac{1 + x \cdot c^{(n)}}{\Pi^{(n)}}$$

über, deren Lösung

$$x = r_{oe} (= r_{eo}) = \frac{\Pi^{(n)} - 1}{c^{(n)}}$$

ist.

Im Beispiel von Lutz (ohne den Couponsatz $r_o = 5\%$) also bei der Zinssatzfolge (5/6/8), erhält man für den zum Parikurs gehörigen Couponsatz $r_o = r_{oe}$ die Bestimmungsgleichung

$$\frac{1 + r_{oe} (1 + 1,08 + 1,08 \cdot 1,06)}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} = 1$$

mit der Lösung

$$r_{oe} = \frac{\Pi^{(3)} - 1}{c^{(3)}} = \frac{1,20204 - 1}{3,2248} = 0,0626519.$$

Macht man die "Probe", d.h. setzt man in

1) Einzige Voraussetzung ist $x \neq (-1)$.

$$r_o p_o^{(3)} = \frac{1 + r_o \cdot 3,2248}{1,20204}$$

für r_o den soeben errechneten Wert $r_o = r_{oe} = 0,0626519$ ein, so erhält man für

$$r_o p_o^{(3)} = r_{oe} p_o^{(3)} = p_o^{(3)}$$

den Wert 1.

Man erkennt nun sofort, daß für die Angepaßtheit des Couponsatzes $r_o = r_{oe}$ bei einer gegebenen Zinssatzfolge folgender wichtiger Satz gilt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Angepaßtheit des Couponsatzes $r_o (= r_{oe})$ an die gegebene Zinssatzfolge r_i ($i=1, \dots, n$) ist die Gleichheit dieses Couponsatzes $r_o = r_{oe}$ mit dem effektiven Zinssatz $r_e (= r_{eo})$, also

$$r_o (= r_{oe}) = r_e (= r_{eo}).$$

Aus

$$r_o = r_e$$

folgt nämlich mit

$$\begin{aligned} r_o p_o^{(n)} &= \frac{1+r_e \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1+r_e)^n} \\ (=r_e) &= \frac{1 + (1+r_e)^n - 1}{(1+r_e)^n} \\ &= \frac{(1+r_e)^n}{(1+r_e)^n} = 1, \end{aligned}$$

daß der Kurs $r_o (= r_e) p_o^{(n)}$ pari ist.

Ist umgekehrt der Kurs pari, d.h. ist

$$r_o (=x) p_o^{(n)} = \frac{1 + x \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1+r_e)^n} = 1,$$

so folgt daraus

$$1 + x \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e = 1 \cdot (1+r_e)^n$$

und weiter

$$x \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e = (1+r_e)^n - 1$$

oder

$$\frac{x}{r_e} = \frac{(1+r_e)^n - 1}{(1+r_e)^n - 1}$$

also

$$x = r_e \quad (\text{wobei } x \text{ für } r_o \text{ steht}).$$

Ist der Couponsatz r_o nicht angepaßt, also um $(\pm) \Delta$ größer (oder kleiner) als der angepaßte Effektivzinssatz $r_{eo} = r_{oe}$, so findet man aus der Kursformel für

$$r_o^{p_o(n)} \quad \text{mit} \quad r_o = r_{oe} (\pm) \Delta \quad \text{und} \quad \Delta > 0$$

unter Berücksichtigung von $r_{oe}^{p_o(n)} = 1$ für $r_o^{p_o(n)}$ den Wert:

$$\begin{aligned} r_o^{p_o(n)} &= \frac{1 + (r_e (\pm) \Delta) \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1+r_e)^n} \\ &= \frac{1 + r_e \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1+r_e)^n} (\pm) \Delta \frac{\left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1+r_e)^n} \\ &= 1 (\pm) \frac{\Delta}{r_e} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+r_e)^n} \right], \end{aligned}$$

wobei (da $r_e > 0$ angenommen wird) $\frac{1}{(1+r_e)^n} < 1$ sein muß.

Es besteht also im Falle der Nichtanpassung die Alternative

$$r_o p_o^{(n)} \geq 1,$$

oder (was dasselbe ist) $r_e p_o^{(n)} \geq r_{oe} p_o^{(n)}$,

je nach dem, ob einer der Fälle

$$r_o \geq r_e$$

zutrifft.

Ist (im 1. Fall) $r_o = r_e + \Delta$, so ist also auch $r_o p_o^{(n)} > r_{oe} p_o^{(n)} (=1)$,

ist (im 2. Fall) $r_o = r_e - \Delta$, so ist $r_o p_o^{(n)} < r_{oe} p_o^{(n)} (=1)$.

Man sieht, daß der (Zinfuss)-Kurs dann über (unter) par¹⁾ liegt, wenn der Couponsatz r_o über (unter) den angepaßten Couponsatz, der gleich dem angepaßten Effektivzinssatz r_{oe} ist, liegt.¹⁾

Im 1. Fall muß durch einen entsprechenden Kursverlust $1 - r_o p_o^{(n)}$ der "zu große Zinsgewinn" (wegen des zu großen Couponsatzes $r_o > r_{oe} (= r_{eo})$), im 2. Fall der "zu kleine Zinsgewinn" (wegen des zu kleinen Couponsatzes $r_o < r_{oe} (= r_{eo})$) durch einen entsprechenden Kursgewinn ausgeglichen werden.

Vergleicht man nämlich die Zinserträge von festverzinslichen Wertpapieren mit dem Couponsatz r_o (als festem Nominalzinssatz) mit den Zinserträgen eines Sparkontos,

1) Für Konsols, also für $n \rightarrow \infty$, vereinfacht sich asymptotisch der Kurs $r_o p_o^{(\infty)}$ in Abhängigkeit von r_o zu $1(\pm) \frac{\Delta}{r_e}$, wenn man r_o als Summe aus dem angepaßten Couponsatz $r_{oe} = r_{eo}$ und einem Zusatzglied Δ auffaßt.

dessen Anfangswert (1 oder 100) gleich dem Nennwert des genannten Wertpapiere ist, so würde bei einem zu hohen Zinsgewinn des Wertpapiere infolge überhöhter Zinszahlungen (entsprechend dem über dem Anpassungssatz r_{oe} liegenden Couponsatzes r_o dieses Wertpapiere) ein Amortisationseffekt, also eine Verringerung des Anfangswertes des Vermögens resultieren.

Bei zu niedrigen Zinszahlungen würde dagegen entsprechend einem Couponsatz $r_o < r_{oe}$ ein Vermögenszuwachs durch Ansammlung der nicht ausgezahlten Zinsanteile die Folge sein.

Durchläuft der Couponsatz die gesamte Werteskala positiver r_o -Werte (einschließlich der 0), also die Werte $r_o = 0$ bis $r_o = \infty$, so können als besonders "charakteristische" (diesen r_o -Werten zugehörige) Effektivzinssätze außer dem Effektivzinssatz ${}_o r_e$ für couponfreie Wertpapiere der (der gegebenen Zinssatzfolge) angepaßte Effektivzinssatz $r_{eo} (= r_{oe})$ sowie der effektive "Grenzzinssatz" ${}^\infty r_e$ bezeichnet werden. Von geringerer Wichtigkeit sind die Effektivzinssätze, die zu den Randwerten r_m u. r_M bzw. zu den verschiedenen Mittelwerten (r_a bzw. r_g) gehören, wenn diese als Couponsätze aufgefaßt werden. Von all diesen Effektivzinssätzen ist nur der $r_o = 0$ -Effektivzinssatz, d.h. der Effektivzinssatz r_e , der zum Couponsatz 0 gehört, von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze, also von der Anordnung der Menge der gegebenen Einperiodenterminzinssätze, unabhängig.

Ändert man die Reihenfolge der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge (deren Zinssätze r_i ($i=1, \dots, n$) zunächst als sämtlich von einander verschieden angenommen werden sollen), so ist die Zahl der möglichen Anordnungen dieser Zinssätze (Permutationen) bei der soeben gemachten Voraussetzung gleich $n!$

1) Der Zinssatz ${}^\infty r_e$, der sich als "Grenzwert" des Effektivzinssatzes r_e für $r_o = \infty$ ergibt, soll, da die Bezeichnung "Grenzeffektivzinssatz" in der Literatur in anderer Bedeutung verwendet wird, im folgenden als Endeffektivzinssatz oder ($r_o = \infty$)-Effektivzinssatz bezeichnet werden.

Für das Beispiel der Zinssatzfolge (3,5) gibt es also $2 = 2!$ mögliche Anordnungen $r_1 = 0,03$; $r_2 = 0,05$ bzw. $r_1^* = 0,05$; $r_2^* = 0,03$, für das Beispiel von Lutz (ohne den Couponsatz $r_o = 5\%$) $3! = 6$ mögliche Anordnungen usw. Die Kennzeichnung der Anordnungen (Permutationen) der Einperiodenterminzinssätze der gegebenen Zinssatzfolge soll durch den (zweiten) Index j erfolgen, und zwar soll $j=1$ die Anordnung der Zinssätze r_i ($i=1, \dots, n$) in der ursprünglichen Reihenfolge bedeuten. Die allgemeine Bedeutung der Anordnung der gegebenen Zinssatzfolge wird im nächsten Abschnitt ¹⁾ behandelt werden.

Für den besonders einfachen Fall von nur zwei (verschiedenen) Einperiodenterminzinssätzen $r_1 = r_2^* = 0,03$ und $r_2 = r_1^* = 0,05$ soll anschließend eine Übersicht der "charakteristischen" Effektivzinssätze r_{ej} ($j=1,2$) (in Abhängigkeit vom Couponsatz) in tabellarischer Form ²⁾ gegeben werden, und zwar für beide möglichen Anordnungen ($j = 1,2$) der gegebenen Einperiodenterminzinssätze ($j=1: (3/5)$; $j=2: (5/3)$). Zur Vervollständigung sind in dieser Tabelle auch noch die jeweils zugehörigen Kurse $p_o^{(n)}$ mit entsprechendem Zweitindex $p_{o1}^{(n)}$ und $p_{o2}^{(n)}$ aufgeführt worden.

Bezüglich der Schwierigkeiten, die bei der Berechnung der Tabellenwerte zu überwinden sind, ist zu sagen, daß am leichtesten von allen der Effektivzinssatz r_e (genauer $r_e^{(2)}$), der, wie bereits mehrfach erwähnt, mit dem langfristigen Zinssatz $R^{(2)}$ der klassischen Erwartungstheorie identisch ist, zu bestimmen ist. Diese Bestimmung erfolgt einfach durch Bildung des (sogenannten) geometrischen Mittelwertes der Einperiodenterminzinssätze der gegebenen Zinssatzfolge. Alle anderen charakteristischen r_e -Werte sind erstens doppelt ($n!$ ist für $n=2$ gleich $2!=2$) zu bestimmen, und zweitens sind abgesehen vom

1) Vgl. den Abschnitt II,6, S. 97 ff.

2) Vgl. Tabelle II-5-1 auf der folgenden Seite

Tabelle II-5-1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$r_o =$ 0	$r_o = r_m$ $= 0,03$	$r_o = r_{oel}$ $= 0,039756$	$r_o = r_g$ $= 0,0399519$	$r_o = r_a$ $= 0,04$	$r_o = r_{oe2}$ $= 0,0401477$	$r_o = r_M$ $= 0,05$	$r_o =$ ∞
Fall 1: r_{el} (3/5)	0,0399519	0,039802	0,039756	0,039755	0,039755	---	0,0397090	0,036529
Fall 2: r_{e2} (5/3)		0,0401004	---	0,040147	0,040147	0,0401477	0,0401924	0,043371
$P_{ol}^{(2)} (r_o)$		0,9815071	1,000 000	1,0003711	1,0004623	---	1,01941174	
$P_{o2}^{(2)} (r_o)$	0,9246417		---	0,9996323	0,9997226	1,000 000	1,01849280	
arithm. Mittelwert aus r_{el} und r_{e2}	---	$r_o^{ea} =$ 0,0399512	---	$r_g^{ea} =$ 0,0399510	$r_a^{ea} =$ 0,0399510	---	$r_M^{ea} =$ 0,0399507	$r_{oo}^{ea} =$ 0,039950

"angepaßten Effektivzinssatz", der sich, wie gezeigt wurde, mit Hilfe einer linearen Gleichung bestimmen läßt, die Bestimmungsgleichungen für diese r_e -Werte vom

$$n\text{-ten Grade} \quad r_o \frac{p_o^{(n)}}{p_o} = \frac{1 + r_o [(1+r_e)^n - 1] : r_e}{(1 + r_e)^n}.$$

Aus Tabelle II-5-1 ist zu entnehmen, daß der effektive Zinssatz r_e vom "klassischen Erwartungswert"

$${}_o r_e^{(2)} = r_g = R^{(2)} = 2\sqrt{1,03 \cdot 1,05} - 1 = 0,0399519$$

im Falle 1 (d.h. für die Zinssatzfolge 3/5) über den angepaßten Effektivzinssatz

$r_{eol} = 0,039756$ auf den $(r_o=\infty)$ -Effektivzinssatz

$${}_{\infty} r_{el} = 0,036529, \text{ also relativ um } \frac{0,043229}{0,0399519} = 0,08567,$$

d.h. um 8,6% abfällt, während er im Fall 2, d.h. bei umgekehrter Zinssatzfolge (5/3) vom gleichen Ausgangswert (klassischer Erwartungswert) über den angepaßten

Effektivzinssatz $r_{eo2} = 0,0401477$ auf den $(r_o=\infty)$ -Effektivzinssatz ${}_{\infty} r_{e2} = 0,043371$, also relativ um

$$\frac{0,0034191}{0,039951} = 0,0855804, \text{ d.h. um 8,6\%, ansteigt.}$$

Bei der sehr langsamen Änderung des Effektivzinssatzes im Vergleich zur Änderung des Couponsatzes ist es nicht verständlich, daß sich sowohl für $r_o = r_a$ (den arithmetischen Mittelwert 0,04 von r_1 und r_2) als auch für $r_o = r_g$ (den sog. geometrischen Mittelwert 0,0399519 von r_1 und r_2) jeweils der gleiche Effektivzinssatz (0,039756 bzw. 0,040147) ergibt.

Obwohl die entsprechenden Effektivzinssätze im Falle 1 bzw. 2 mit wachsendem r_o auseinanderstreben und sich asymptotisch für $r_o \rightarrow \infty$ den oben als $(r_o=\infty)$ -Effektivzinssätzen bezeichneten Werten ${}_{\infty} r_{el}$ bzw. ${}_{\infty} r_{e2}$ nähern, bleibt der arithmetische Mittelwert der ent-

sprechenden Effektivzinssätze für die beiden genannten Fälle doch weitgehend konstant, allerdings mit einem geringfügigen Absinken für $r_o \rightarrow \infty$.

Die Übereinstimmung von Spalte 5 und 6 der Tabelle II-5-1, $r_g^{r_{ei}}$ und $r_a^{r_{ei}}$ ($i=1,2$) bzw. $r_g^{r_{ea}}$ und $r_a^{r_{ea}}$ ergibt sich natürlich aus der Tatsache, daß der arithmetische Mittelwert $r_a = r_1 + r_e = 0,04$ sich nur ganz geringfügig vom sogenannten arithmetischen Mittelwert

$$r_g = \sqrt[2]{(1+r_1)(1+r_2)} - 1 = 0,0399319$$

unterscheidet.

Der r_o -Differenz $r_M - r_m = 0,02$ entspricht (im Fall 1) die zugehörige r_e -Differenz

$$D_{r_e}(3/5) = 5r_e - 3r_e = 0,0397090 - 0,039802 = (-)0,000093,$$

was ein $\frac{D_{r_e}}{D_{r_o}} = 1$ Verhältnis von 0,00465, also rund 4,5% ergibt.

Rein rechnerisch würde sich also (bei linearer Interpolation) für die r_o -Differenz $r_a - r_g = 0,0000481$ eine zugehörige r_e -Differenz von $0,000000481 \cdot 4,5 = 0,000002$ ergeben, ein Wert, der an der Grenze der Rechengenauigkeit des benutzten Rechengerätes liegt.

Das allgemeine Verfahren der Bestimmung des Effektivzinssatzes, der (z.B. nach der Definition von Malkiel²⁾) mit dem yield-to-maturity identisch ist, also die Methode, den effektiven Zinssatz r_e aus der durch Kursgleichsetzung $p^{(n)} = P^{(n)}$ entstehenden Bestimmungsgleichung für r_e zu berechnen, vereinfacht sich im Anpassungsfalle (r_{eo}) auf die Berechnung des angepaßten Couponsatzes r_{oe} mit Hilfe der linearen Gleichung

$$r_{oe} = \frac{\Pi^{(n)} - 1}{c^{(n)}},$$

1) absolut genommen

2) Vgl. Malkiel, B.G., a.a.O., S. 41 ff.

die entsteht, wenn man $\overline{p^{(n)}} = 1$ setzt.

Der wesentliche Vorteil für die Effektivzinssatzbestimmung besteht also in diesem Falle $p^{(n)} = \overline{p^{(n)}} = 1$ in der Berechnung des Couponsatzes statt des Effektivzinssatzes und damit der Lösung einer Gleichung 1., statt einer Gleichung n-ten Grades.

Löst man die Bestimmungsgleichung $r_e = x = r_{eo}$, nämlich

$$1 = \frac{1+x \left[1+(1+r_n)+\dots+(1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots (1+r_2) \right]}{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)}$$

nach x auf, so geht sie in die Form

$$x = \frac{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n) - 1}{(1+r_n)\dots\dots(1+r_2)+(1+r_n)\dots(1+r_3)+\dots+(1+r_n)+1}$$

über, d.h. genau in die Gleichung, die von Claassen ¹⁾ für die Bestimmung des langfristigen Zinssatzes $R^{(n)}$ angegeben wird.

" R_n ist der langfristige Zinssatz im Jahre 1 für Wertpapiere mit einer Laufzeit von n Jahren; r steht für die bekannten bzw. erwarteten kurzfristigen Zinssätze innerhalb des Zeitraumes der Laufzeit des langfristigen Wertpapiere." ²⁾

Neben der obigen Gleichung findet man bei Claassen auch noch für die Bestimmung von R_n die bekannte Formel der klassischen Erwartungstheorie für den langfristigen Zinssatz R_n

$$R_n = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)} - 1.$$

Wie man sieht, ergeben sich bei der Aufgliederung und Be-

1) Vgl. Claassen, E.M., Ein Beitrag zur Theorie der Zinsstruktur, Diss. Köln, 1963, S. 15, Anm. 1

2) Claassen, E.M., ebenda, S. 13

handlung des Stoffes in der Weise, wie sie der Verfasser dieser Arbeit durchführt, beide Formeln im Zusammenhang mit der Frage nach der Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Couponsatz zwanglos als Sonderfälle, nämlich die letzte Formel für den Fall $r_o = 0$, die erste für den Fall des angepaßten Effektivzinssatzes, also des Zinssatzes, der mit dem zugehörigen Couponsatz bei gegebener Zinssatzfolge identisch ist und damit zum Parikurs gehört.

Daß keine der beiden genannten Formeln den Effektivzinssatz r_e , der zu einer gegebenen Zinssatzgruppe gehört, genau zu bestimmen gestattet, liegt natürlich daran, daß der gegebene Couponsatz r_o in keiner der beiden Formeln auftritt.

Wie im vorhergehenden und diesem Abschnitt gezeigt wurde, ist aber der Effektivzinssatz (wenn man vom Fall der unverändert gleichbleibenden Einperiodenterminzinssätze r_i ($i = 1, \dots, n$) = r absieht, durchaus ¹⁾ vom Couponsatz abhängig. Für die exakte Berechnung von r_e kann also im allgemeinen Falle, wenn eine bestimmte Zinssatzfolge ²⁾ und ein bestimmter Couponsatz gegeben sind (etwa im Beispiel von Lutz), nur die Bestimmungsgleichung herangezogen werden, die durch Gleichsetzung der Kurse $p(n)$ und $\overline{p(n)}$ erhalten wird.

Da neben dem eigentlichen Beispiel von Lutz (Zinssatzgruppe 5/6/8//5) im folgenden häufig auch das sog. abgeänderte Beispiel von Lutz (5/6/8//6) Verwendung findet, werden nachfolgend in einer r_e -WertTabelle außer den charakteristischen r_e -Werten ($r_{oe}^{(3)}$, $r_{eo}^{(3)}$ und ${}_{oo}r_e^{(3)}$) für die Zinssatzfolge (5/6/8) auch die Effektivzinssätze ${}_5r_e^{(3)}$ und ${}_6r_e^{(3)}$, die zu den r_o -Werten $r_o = 0,05$ bzw. $r_o = 0,06$ gehören, zusammengestellt. In der 3. Zeile wird außerdem auch noch der zugehörige Kurs $r_o p_o^{(3)}$ angegeben. Der an die gegebene Zinssatzfolge angepaßte

1) Vgl. S. 73 ff.

2) bei der nicht alle Zinssätze einander gleich sind

Effektivzins(=Coupon-)satz ist

$$r_{oe}^{(3)} = r_{eo}^{(3)} = \frac{\Pi^{(3)} - 1}{c^{(3)}} = \frac{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08 - 1}{1 + 1,08 + 1,08 \cdot 1,06}$$

$$= \frac{1,20204 - 1}{3,2248} = 0,0626519,$$

während

$$r_o^{(3)} = r_g^{(3)} = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} - 1 = 0,0632604$$

ist.

Tabelle II-5-2

$r_o =$	0	0,05	0,06	an(5,6,8) angep.Zins- satz= $r_{oe}^{(3)}$ 0,0626519	∞
$r_o r_e^{(3)} =$	0,0632604	0,0627631	0,0626748	$(r_{eo}^{(3)})$ 0,0626519	0,05803224
$r_o p_o^{(3)} =$	0,831919	0,9660577	0,9928854	1,000000	---

6. Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze

Wie bereits an verschiedenen Stellen ¹⁾ dieser Arbeit bemerkt wurde, ist der Effektivzinssatz einer gegebenen Zinssatzfolge (Folge der Einperiodenterminzinssätze r_i ($i = 1, \dots, n$)) bei couponfreien Wertpapieren, d.h. bei Wertpapieren, bei denen Gesamtfälligkeit i.e.S. gilt, identisch mit dem "sogenannten" (oder indirekten) ²⁾ geometrischen Mittel

$$r_g = R^{(n)} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1+r_i)} - 1.$$

Dieser Effektivzinssatz $r_e = r_g$ kann auch nach den Ausführungen der beiden vorangehenden Abschnitte, da er zum Couponsatz $r_o = 0$ gehört, als ${}_o r_e^{(n)}$ bezeichnet werden.

In diesem Falle ($r_o = 0$) ist - wie gezeigt - der Effektivzinssatz $r_e (= {}_o r_e^{(n)})$ von der Aufeinanderfolge der r_i ($i = 1, \dots, n$) in den einzelnen Zinsperioden unabhängig, da sich wegen des kommutativen Gesetzes der Multiplikation die Faktoren im Radikanden des Wurzelzeichens in der obigen Gleichung für $r_g (= R^{(n)})$ beliebig vertauschen lassen.

Bei couponversehene Wertpapieren, also Wertpapieren mit $r_o \neq 0$, ist der effektive Zinssatz aber sehr wohl von der (sukzessiven) Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze r_i ($i=1, \dots, n$), also der Anordnung (r_{1j}, r_{2j}, r_{3j} usw.) abhängig, wo der Zweitindex eine ganz bestimmte der $n!$ möglichen Anordnungen bedeutet, also j die Werte 1 bis $n!$ annehmen kann. (Das gilt allerdings nur, wenn alle r_i der gegebenen Zinssatzfolge von einander verschieden sind). Wenn auch $R^{(n)}$ nur im Falle $r_o = 0$ genau mit dem Effektivzinssatz $r_e = {}_o r_e = r_g$ übereinstimmen kann, so stellt doch der obige - durch "sogenannte" (oder indi-

-
- 1) Vgl. die Abschnitte "Couponfreie und Couponversehene Wertpapiere" sowie "Die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Couponsatz", S. 4 ff. und S. 73 ff.
 2) Vgl. Abschnitt "Arten der Mittelwertbildung", S. 115 ff.

rekte) geometrische Mittelung bestimmte langfristige Zinssatz $r_g = R^{(n)}$ der klassischen Erwartungstheorie - unter bestimmten Bedingungen eine gute Näherung für den tatsächlichen "Effektivzinssatz" des gleichen Verzinsungszeitraumes dar.

Diese Bedingung ist, daß man statt des einzelnen (j-ten) effektiven Zinssatzes $r_{ej}^{(n)}$ ($j = 1, \dots, n!$), der zu jeweils einer bestimmten Anordnung $r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{nj}$ der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge gehört, den arithmetischen Mittelwert

$$r_{ea} = \left(\sum_{j=1}^{n!} r_{ej} \right) : (n!)$$

aller $n!$ Effektivzinssätze r_{ej} ($j = 1, \dots, n!$) verwendet.

Bevor dieser (arithmetische) Mittelwert und seine Beziehung zum langfristigen Zinssatz $R^{(n)}$ ($= r_g$) der klassischen Erwartungstheorie näher untersucht werden kann, muß zunächst (an einigen einfachen Beispielen) die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes r_e (genauer $r_{ej}^{(n)}$) ($j=1, \dots, n!$) von der sukzessiven Reihenfolge der gegebenen Einperiodenterminzinssätze r_i ($i = 1, \dots, n$) bei unverändertem Couponsatz r_o dargestellt werden.

Beispiel

Bezeichnet man den durch arithmetische Mittelung aus den Zinssätzen $r_1 = 0,03$ und $r_2 = 0,05$ der gegebenen Zinssatzfolge r_i ($i = 1, 2$) gebildeten Couponsatz $r_o = 0,04$ als "näherungsweise angepaßt" ¹⁾, so erweist sich dieser

1) Es gibt zu jeder Anordnung der Zinssätze einer gegebenen Zinssatzmenge (wenn alle n r_i -Werte voneinander verschieden sind, gibt es $n!$ verschiedene Anordnungsmöglichkeiten) genau einen eindeutig bestimmten angepaßten Effektivzinssatz, der sich i.a. nicht sehr vom arithmetischen oder (sogenannten) geometrischen Mittelwert der Zinssätze dieser Zinssatzfolge unterscheidet, die man beide daher als "näherungsweise angepaßte" Couponsätze bezeichnen kann.

näherungsweise angepaßte Couponsatz als guter Näherungswert für den mittleren effektiven Zinssatz r_{ea} ,

wo $r_{ea} (= {}_4r_{ea}^{(2)})$ durch $({}_4r_{el}^{(2)} + {}_4r_{e2}^{(2)}) : 2$

definiert ist.

Der Zweitindex j bei ${}_4r_{ej}^{(2)}$ ($j = 1, 2$) kennzeichnet dabei eine der zwei ($2! = 2$) möglichen Zinssatzfolgen, die sich aus den zwei gegebenen Zinssätzen r_1 und r_2 bilden lassen;

Fall 1) kennzeichnet die Zinssatzfolge r_1, r_2 ,

Fall 2) die umgekehrte Zinssatzfolge.

Fall 1: (Zinssatzfolge 3%, 5%)

In diesem Fall liefert die Kursformel für ${}_4P_{ol}^{(2)}$ den Wert

$${}_4P_{ol}^{(2)} = \frac{1+0,04 (1,05 + 1)}{1,03 \cdot 1,05} = 1,0004622.$$

Der zugehörige Effektivzinssatz r_e , der die Gleichung

$$1,0004622 = \frac{1+0,04 \left[(1+r_{el})^2 - 1 \right] : r_{el}}{(1 + r_{el})^2}$$

erfüllen muß, ist

$$r_{el} = 0,039755.$$

Der Zahlenwert dieses Effektivzinssatzes, der zur Zinssatzgruppe (3/5//4) gehört, liegt um 0,000197 unter dem Wert des langfristigen Zinssatzes $R^{(2)}$ der klassischen Erwartungstheorie; (dabei bedeutet "langfristig" hier schon zwei Zinsperioden):

$$R^{(2)} = \sqrt[2]{1,03 \cdot 1,05} - 1 = 0,0399519.$$

Fall 2: (Zinssatzfolge 5%, 3%)

Für ${}_4P_{o2}^{(2)}$ ergibt sich in diesem Fall

$$4P_{02}^{(2)} = \frac{1 + 0,04(1,03 + 1)}{1,03 \cdot 1,05} = 0,9997226.$$

Für r_{e2} errechnet sich aus

$$0,9997226 = \frac{1+0,04 \left[(1+r_{e2})^2 - 1 \right] : r_{e2}}{(1 + r_{e2})^2}$$

der Wert

$$r_{e2} = 0,0401471,$$

also ein Effektivzinssatz, der um 0,00195 über dem $R^{(2)}$ -Wert liegt.

Aus der nahezu völligen Gleichheit der beiden Differenzen

$$r_{e2} - R^{(2)} = D(e2/g) = 0,00195 \quad \text{bzw.}$$

$$r_{e1} - R^{(2)} = D(e1/g) = - 0,00197$$

folgt, daß tatsächlich der $R^{(2)}$ -Wert fast genau das arithmetische Mittel

$$r_{ea} = \frac{r_{e1} + r_{e2}}{2} = \frac{0,039755 + 0,0401471}{2} = 0,039951$$

der Effektivzinssätze r_{e1} und r_{e2} ist.

Ersichtlich ist das sog., d.h. ind., geometr. Mittel der Zinssätze r_i ($i=1, \dots, n$) der gegebenen Zinssatzfolge

$$r_g = R^{(2)} = 0,0399519$$

ein besserer Näherungswert für den arithmetisch gemittelten Effektivzinssatz

$$r_{ea} = 0,039951$$

1)

als deren arithmetisches Mittel $r_a = \frac{0,03 + 0,05}{2} = 0,04$,

und zwar unterscheidet sich der mittlere Effektivzinssatz

$r_{ea} = 0,039951$ vom $(r_g = R^{(2)} = {}_0r_e^{(2)})$ -Wert um $9 \cdot 10^{-7}$

vom r_a -Wert um rund $5 \cdot 10^{-5}$.

1) Das ind. harm. Mittel von 0,03 und 0,05, nämlich $r_h = 0,0399038$, stellt mit $r_{ea} - r_h = 0,0000472$ zwar einen geringfügig besseren Näherungswert für r_{ea} dar als der arithmetische ($r_{ea} - r_a = 0,0000490$), beide sind aber viel schlechter als r_{ea} der indirekte geometr. Mittelwert.

Wichtig ist, daß es natürlich nicht nur für einen bestimmten Couponsatz (oben $r_o = 4\%$) bei Annahme verschiedener Anordnungsmöglichkeiten der Zinssätze einer gegebenen Zinssatzfolge r_i ($i=1, \dots, n$) unter der Voraussetzung der Verschiedenheit aller r_i voneinander $n!$ verschiedene Effektivzinssätze gibt, sondern daß diese Feststellung abgesehen vom ($r_o=0$)-Effektivzinssatz ${}_{o1}r_e^{(n)}$ auch für die als charakteristisch bezeichneten Effektivzinssätze $r_{eo}^{(n)}$ bzw. ${}_{oo}r_e^{(n)}$ zutrifft, d.h. es gibt unter der soeben gemachten Voraussetzung auch $n!$ verschiedene angepaßte $r_{eo,j}^{(n)}$ ($j = 1, \dots, n!$) und $n!$ verschiedene ($r_o=oo$)-Effektivzinssätze ${}_{oo}r_{ej}^{(n)}$ ($j = 1, \dots, n$).

Für das obige Beispiel ($j=1$ kennzeichnet wie bisher die Zinssatzfolge (3/5), $j=2$ die Zinssatzfolge (5/3)) erhält man für $r_{eo,j}^{(2)} = \frac{\Pi^{(2)} - 1}{c_j^{(2)}}$ ($j=1,2$) mit

$$c_1^{(2)} = 1 + 1,05 = 2,05 \quad \text{bzw.} \quad c_2^{(2)} = 2,03 \quad \text{und}$$

$$\Pi^{(2)} = 1,03 \cdot 1,05 = 1,0815 \quad \text{die beiden angepaßten Effektivzinssätze}$$

$$r_{eo}^{(2)} = \frac{0,0815}{2,05} = 0,039756 \quad \text{bzw.} \quad r_{eo,2}^{(2)} = \frac{0,0815}{2,05} = 0,0401477$$

mit dem arithmetischen Mittelwert $r_{eo,a}^{(2)} = 0,0399518$.¹⁾

Für die ($r_o=oo$)-Effektivzinssätze ${}_{oo}r_{e1}^{(2)}$ und ${}_{oo}r_{e2}^{(2)}$ findet man aus der Bestimmungsgleichung der zugehörigen Zinsfaktoren $y_e = 1 + r_e$, nämlich

$$\frac{{}_{oo}y_e - 1}{{}_{oo}y_e} = \frac{1}{{}_{oo}y_e} = \frac{c_j^{(n)}}{\Pi^{(n)}} \quad (j=1,2)$$

1) Der arithmetische Mittelwert von $r_{o1}^{(2)}$ und $r_{o2}^{(2)}$ muß wegen $\frac{1}{2} \left(\frac{0,0815}{c_1^{(2)}} + \frac{0,0815}{c_2^{(2)}} \right) = \frac{0,0815}{c_h^{(2)}}$, wo

$$c_h^{(2)} \text{ der Gleichung } \frac{2}{c_h^{(2)}} = \frac{1}{c_1^{(2)}} + \frac{1}{c_2^{(2)}} \text{ genügt, also der}$$

(direkte) harmonische Mittelwert von $c_1^{(2)} = 2,05$ und $c_2^{(2)} = 2,03$ ist, mit dem zu $c_h^{(2)} = 2,0399509$ gehörigen

r_{oe} -Wert $r_{oe,h} = 0,0399519$ übereinstimmen.

die Zahlenwerte

$\infty r_{el} = 0,03652898$ bzw. $\infty r_{e2} = 0,0433708$ mit dem (arithmetischen) Mittelwert $\infty r_{ea}^{(2)} = 0,03994998$, das ist rund $0,03995$, ein Wert, der sich um $0,0000019$ vom $r_g = R^{(2)} = \infty r_e^{(2)}$ -Wert unterscheidet.

Benutzt man als weiteres Beispiel das von Lutz (Zinssatzgruppe (5/6/8//5)), so ergeben sich hier, da alle Zinssätze von einander verschieden sind, $6 = 3!$ Anordnungsmöglichkeiten für die Zinssatzfolge (5/6/8) und dementsprechend 6 verschiedene $c_j^{(3)}$ -Werte ($j = 1, \dots, 6$), die dann 6 verschiedene Kurswerte ($P_{oj}^{(3)}$ ($j = 1, \dots, 6$)) und 6 verschiedene Effektivzinssatzwerte ($r_{ej}^{(3)}$ ($j=1..6$)) zur Folge haben.

Tabelle II-6-1

Zusammenstellung der Kurswerte und der zugehörigen
Effektivzinssätze für die Fälle 1-6

1	2	3	4	5
Fall	Zinssatzfolge	Kurs $P_{oj}^{(3)}$ (j=1...6)	Effektivzinss. r_{ei} ($r_{ej}^{(3)}$) (j=1...6)	Differenz $r_{ej} - r_g$ $= D(ej/g)$ (j=1...6)
1	(5, 6, 8)	0,9660577	0,0627631	- 0,0004973
2	(5, 8, 6)	0,9652257	0,0630837	- 0,0001767
3	(6, 5, 8)	0,9656084	0,0629362	- 0,0003242
4	(6, 8, 5)	0,9643605	0,0634175	+ 0,0001571
5	(8, 5, 6)	0,9639030	0,0635941	+ 0,0003337
6	(8, 6, 5)	0,9623870	0,0637548	+ 0,0004944

Vergleicht man die $D(e_j/g)$ -Werte ($j = 1 \dots 6$), von denen drei positiv und drei negativ sind, miteinander

$$\begin{array}{ll} D(e_6/g) = 0,0004944 & D(e_1/g) = 0,0004973 \\ D(e_5/g) = 0,0003337 & D(e_2/g) = 0,0001767 \\ D(e_4/g) = \underline{0,0001571} & D(e_3/g) = \underline{0,0003242} \\ \quad \quad \quad \underline{+ 0,0009852} & \quad \quad \quad \underline{- 0,0009982} \end{array}$$

so fällt auf, daß ihre algebraische Summe fast genau den Wert 0 hat.

Das bedeutet, daß der arithmetische Mittelwert aus diesen zur Zinssatzgruppe $\{5/6/8/6\}$ gehörigen Effektivzinssätzen einen mittleren Effektivzinssatz r_{ea} ergibt, der nahezu mit dem $R^{(3)}$ -Wert der klassischen Erwartungstheorie identisch ist.

Daß sich bei der Zinssatzfolge (5, 6, 8) (Fall 1) der niedrigste Ertragssatz (Effektivzinssatz 0,062763) ergibt, hat seinen Grund darin, daß der niedrigste Zinssatz der Zinssatzfolge ($r_1 = 5\%$) bei der Aufzinsung der Couponbeträge entfällt, während sowohl der 1. wie der 2. Couponbetrag mit dem höchsten Zinssatz der Zinssatzfolge ($r_3 = 8\%$) aufgezinst werden. Die Diskontierung mit den Abzinsungsfaktoren 1,05; 1,06; 1,08 erfolgt in allen 6 Fällen in der gleichen Weise, so daß dadurch das Verhältnis der Effektivzinssätze zueinander keine Veränderung erfahren kann.

Die Folge 5, 6, 8 stellt die einzige monoton steigende Zinssatzfolge der gegebenen drei Zinssätze dar, dementsprechend muß der $c_1^{(3)}$ -Wert, nämlich $(1+1,08+1,08 \cdot 1,06) = 3,2248$ und damit auch der Kurs $p_{01}^{(3)}$ der größte der sechs $c_j^{(3)}$ - (bzw. $p_{0j}^{(3)}$ -)Werte sein, der zugehörige Effektivzinssatz $4r_{e1}^{(3)}$ also der niedrigste der $4r_{ej}^{(3)}$ -Werte.

1) Vgl. Spalte 5 der Tabelle II-6-1, S. 102

Umgekehrt ergibt die Zinssatzfolge (8, 6, 5) (Fall 6) den höchsten Ertragssatz (Effektivzinssatz 0,0637548) deswegen, weil jetzt der 1. Zinssatz der (umgestellten) Zinssatzfolge $r_1^* (= r_3) = 8\%$ bei der Aufzinsung entfällt, der niedrigste Zinssatz $r_3^* (= r_1) = 5\%$ jetzt aber bei der Aufzinsung zweimal vorkommt.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang die Tatsache, daß sich der arithmetische Mittelwert aus dem höchsten und niedrigsten Einperiodenzinssatz, wenn man - aus Gründen der Vereinfachung des Verfahrens - nur zwei¹⁾ anstelle von 6 (= 3!) Effektivzinssätzen bei der Mittelwertbildung heranzieht, also

$$\overline{r_{ea}} = (r_{e1} + r_{e2}) : 2 = 0,0632689$$

vom arithmetischen Mittelwert aller 6 Einperiodenterminzinssätze $r_{ea} = (r_{ei}) : 6$ ($i=1...6$), nämlich $r_{ea} = 0,063582$ nur ganz unwesentlich unterscheidet.

Würde also ein Anleger, der hinsichtlich der Zinsentwicklung in den nächsten 3 Jahren die Zinssätze 5%, 6%, 8% mit Sicherheit erwartet, aber nicht sicher ist, in welcher Weise diese Zinssätze im Zeitablauf aufeinanderfolgen werden, je 1/6 seines anzulegenden Vermögens dort investieren, wo - gemäß seiner 6-fach verschiedenen Erwartung - die Verzinsung jeweils so erfolgt, daß genau einer der 6 möglichen Fälle realisiert wird, so wäre für die effektive Gesamtverzinsung der arithmetische Mittelwert r_{ea} der 6 verschiedenen Effektivzinssätze r_{ei} ($i = 1...6$) maßgebend.

Diese Art der gestreuten Kapitalanlage (Diversifikation) würde eine Verteilung des Risikos im Sinne der Portefolio-Selection bedeuten. Denn würde bei der Anlage des Gesamtvermögens die Verzinsung nur nach einer der 6 möglichen

1) Auf die Beschränkung der Anzahl der zu mittelnden Zahlenwerte bei der Bestimmung "näherungsweise" Mittelwerte wird später eingegangen (s. Tab. II-6-3, S.108)

Zinssatzfolgen z.B. gemäß Fall 1) erfolgen, so würde der betreffende Effektivzinssatz r_{el} um $D(el/ea)=0,04973\%$ unter dem mittleren Effektivzinssatz $r_{ea} = 6,32582\%$ liegen.

Es erscheint zweckmäßig bei der Frage nach dem Zahlenwert der $(3! = 6)$ angepaßten Effektivzinssätze $r_{eo,j}^{(3)}$ ($j=1..6$) bzw. der Fragen nach der Größe der Grenzeffektivzinssätze $oo r_{ej}^{(3)}$ ($j=1..6$) in Abhängigkeit von der betreffenden Permutation der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge (5/6/8) die in Frage kommenden Zahlenwerte in ähnlicher Weise tabellarisch zusammenzufassen wie die Zahlenangaben zu den Effektivzinssätzen, die zur gleichen Zinssatzfolge und dem Couponsatz 5%, also zur Zinssatzgruppe (5/6/8//5) gehören (Tab. II-6-1)

Tabelle II-6-2

1	2	3	4
$j = c_j^{(3)}$ -Werte	$r_{eo,j}^{(3)}$ -Werte	$oo r_{ej}^{(3)}$ -Werte	$\frac{c_j^{(3)}}{\Pi(3)}$
1 3,2248	0,0626519	0,0580322	2,6827726
2 3,2048	0,0630429	0,0613935	2,6661342
3 3,2140	0,0628624	0,0598429	2,6737878
4 3,1840	0,0634547	0,0649270	2,6488303
5 3,1730	0,0636747	0,0668113	2,6396792
6 3,1630	0,0638760	0,0685341	2,63136

Die Zahlenwerte in Spalte 2 erhält man mit Hilfe der Gleichung

$$r_{eo}^{(3)} = \frac{\Pi(3) - 1}{c_j^{(3)}} \quad (j=1..6),$$

die Zahlenwerte in Spalte 3 aus der Gleichung

$$\frac{{}_{\infty}y_{ej}^3 - 1}{{}_{\infty}y_{ej}^3} \cdot \frac{1}{{}_{\infty}y_{ej} - 1} = \frac{c_j^{(3)}}{\Pi^{(3)}} \quad (j=1\dots 6),$$

wo ${}_{\infty}y_{ej} = 1 + {}_{\infty}r_{ej}^{(3)}$ ist. Schon hier ist anzumerken, daß für sehr lange Laufzeiten ($n \rightarrow \infty$) der 1. Faktor auf der linken Seite der obigen Gleichung wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{{}_{\infty}y_{ej}^n - 1}{{}_{\infty}y_{ej}^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{{}_{\infty}y_{ej}^n} \right)$$

$$\text{für } r_{ej} > 0, \text{ also } y_{ej} = (1 + r_{ej}) > 1,$$

in den Zahlenwert 1 übergeht. ¹⁾

Der arithmetische Mittelwert aus Spalte 2, d.h. der mittlere angepaßte Effektivzinssatz ist $r_{ea}^{(3)} = 0,0632604$,

ein Wert, der genau mit dem

$(r_g = R^{(3)} = {}_0r_e^{(3)})$ -Wert $\sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} - 1$ übereinstimmt.

Die Werte aus Spalte 3 ergeben den arithmetischen Mittelwert 0,0632568, der sich vom ${}_0r_e^{(3)}$ -Wert 0,0632604 um $36 \cdot 10^{-7}$ unterscheidet.

Beim Übergang zu Zinssatzfolgen von 4 und mehr Gliedern erhöht sich die Zahl der Möglichkeiten ($4! = 24$, $5! = 120$) so sehr, daß es praktisch unmöglich ist, die zugehörigen Effektivzinssätze zu berechnen, um daraus den r_{ea} -Wert als arithmetischen Mittelwert der $n!$ verschiedenen Effektivzinssätze zu bestimmen.

Wie gezeigt werden wird ²⁾, läßt sich die Berechnung dieses Mittelwertes r_{ea} (mittlerer Effektivzinssatz) dadurch wesentlich vereinfachen, daß man nicht die einzelnen Effektivzinssätze r_{ej} ($j=1, \dots, n!$) für sich

1) Vgl. das Ende des Abschnittes II,2 "Kurs und Effektivzinssatz in Abhängigkeit von der Laufzeit"

2) Vgl. Abschnitt III,3, S. 142 ff.

bestimmt und diese dann (arithmetisch) mittelt, sondern daß man (wie sich zeigt, wird die Genauigkeit des Rechenresultates dabei nicht wesentlich beeinträchtigt) die Mittelwertbildung schon bei den $c_j^{(n)}$ ($j=1, \dots, n!$) vornimmt. Trotzdem bleibt die Rechenarbeit gewaltig und ist für $n > 4$ kaum noch zu leisten.

Nun verringert sich die Zahl der Anordnungsmöglichkeiten der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge ganz wesentlich, wenn man diese Zinssätze nicht mehr wie bisher als sämtlich von einander verschieden annimmt. Bildet man z.B. aus den beiden Zinssätzen 3% und 5% durch Verdoppelung der Zinssatzfolge (3,5) die neue (alternierende) Zinssatzfolge (3,5,3,5), so reduziert sich die Zahl der möglichen Permutationen in diesem Falle von $4!$ auf $\frac{4!}{2!2!} = \binom{4}{2} = 6$.

Numeriert man diese 6 Möglichkeiten in der Weise, daß man mit der monoton "steigenden" Folge ¹⁾, der auch, wie sogleich gezeigt wird, der größte $c_j^{(4)}$ -Wert ²⁾ ($j=1, \dots, 6$), nämlich 4,288075 zukommt, als Nr. 1 beginnt, so erhält man durch "Festhalten" des 4. Zinssatzes (5%) und sukzessive Vertauschung des an 3. Stelle stehenden zweiten 5%-Zinssatzes mit den an 1. bzw. 2. Stelle stehenden 3%-Zinssätzen die folgenden drei Permutationen:

- 1) (3,3,5,5)
- 2) (3,5,3,5)
- 3) (5,3,3,5).

Dabei ist die Reihenfolge 2,3 durch die Größe der zugehörigen $c_j^{(4)}$ -Werte ($j = 2,3$), also durch $c_2^{(4)} = 4,267075$ und $c_3^{(4)} = 4,245445$ bestimmt.

Die restlichen drei Permutationen gehen aus den obigen drei dadurch hervor, daß man die Zinssätze 3% und 5% gegeneinander austauscht, wodurch auch das Ordnungsprinzip für die Reihenfolge der Permutation, nämlich ihre Anord-

-
- 1) nicht monoton steigend im strengen Sinne, d.h. das folgende Glied kann entweder größer oder gleich dem vorangehenden Glied sein
 - 2) was sich allgemein für beliebiges $n=2m$ zeigen läßt (s. S.122 ff.)

Tabelle II-6-3

1	2	3	4	5	6	7
j	Zinssatz- folge	$c_j^{(4)}$	$P_{oj}^{(4)}$	$4^{(4)}_{ej}$	$r^{(4)}_{eo,j}$	$oo^{(4)}_{ej}$
1	3, 3, 5, 5	4, 288075	1, 0016080	0, 03955745	0, 0395613	0, 0357963
2	3, 5, 3, 5	4, 267075	1, 0008898	0, 039755	0, 0397560	0, 0378700
3	5, 3, 3, 5	4, 245445	1, 0001501	0, 0399586	0, 0399586	0, 0400230
4	3, 5, 5, 3	4, 247075	1, 0002058	0, 0399433	0, 0399433	0, 0398602
5	5, 3, 5, 3	4, 225445	0, 9994661	0, 0401471	0, 0401477	0, 04202957
6	5, 5, 3, 3	4, 204845	0, 9987616	0, 0403414	0, 0403444	0, 0399545

M i t t e l w e r t e

Permuta- tionspaare	1/6 2/5 <u>3/4</u>	4, 24546 4, 24626 4, 24626	1, 0001848 1, 0001779 1, 0001779	0, 03994942 0, 03995102 0, 03995090	0, 03995285 0, 03995185 0, 03995095	0, 0399528 0, 03994978 0, 0399416
(arithm. M.W.)	M.W.gesamt	4, 2463266	1, 0001802	0, 03995047	0, 03995188	0, 03994862

Permuta- tionspaare	dir.harm. M.W. 1/6 2/5 3/4	4, 2460537 4, 2461591 4, 246261	indir.harm. M.W. 1/6 2/5 3/4	0, 0399493 0, 0399510 0, 0399510	1)	
	M.W.gesamt	4, 2461581	M.W.gesamt	0, 0399505		

1) Für eine Reihe von zinstheoretischen Größen sind die (direkten bzw. indirekten) harmonischen Mittelwerte wichtiger und aufschaulicher als die arithmetischen. Deswegen werden in Spalte 3 außer den arithmetischen auch die entsprechenden direkten harmonischen und in Spalte 5 die entsprechenden indirekten harmonischen Mittelwerte angegeben.

nung nach der Größe der zugehörigen $c_j^{(4)}$ -Werte (abgesehen von der Permutation Nr. 3 und Nr. 4, wo größenordnungs-
mäßig 4 vor 3 stehen müßte) erhalten bleibt:

$$c_4^{(4)} = 4,247075$$

$$c_5^{(4)} = 4,225445$$

$$c_6^{(4)} = 4,204845$$

Die Anordnungen Nr. 4, Nr. 5, Nr. 6 sind die Umkehrungen der Anordnungen Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3. Insbesondere sind Nr. 2 und Nr. 5 alternierende, Nr. 1 und Nr. 6 monotone Zinssatzfolgen.

Die Tabelle II-6-3 stellt eine Übersicht über die $c_j^{(4)}$ -Werte (Spalte 3), die zugehörigen Kurse ${}_4p_{oj}^{(4)}$ beim Couponsatz $r_o = 4\%$ (Spalte 4) sowie die drei folgenden Effektivzinssätze dar:

- 1) die Effektivzinssätze ${}_4r_{ej}^{(4)}$, beim Couponsatz $r_o = 4\%$ (Spalte 5)
- 2) die angepassten Effektivzinssätze $r_{eo,j}^{(4)}$ (Spalte 6) sowie
- 3) die $\{r_o = \infty\}$ -Effektivzinssätze ${}_{\infty}r_{ej}^{(4)}$ (Spalte 7), wobei j überall von 1 bis 6 läuft.

Außerdem enthält die Tabelle in der unteren Tabellenhälfte eine Zusammenstellung der folgenden (arithmetischen bzw. harmonischen) Mittelwerte:

- 1) die Mittelwerte, die sich für die Permutationspaare 1/6 bzw. 2/5 bzw. 3/4 ergeben; das sind die Mittelwerte, deren zugehörige Permutationen sich nur durch Vertauschung der beiden Zinssätze 3% und 5% unterscheiden und
- 2) die Gesamtmittelwerte, die sich bei der arithmetischen bzw. bei der harmonischen Mittelung über alle sechs Permutationen der ursprünglichen Zinssatzfolge ergeben.

Es zeigt sich, daß die Mittelwerte der Permutationspaare einerseits recht gute Näherungswerte für die entsprechenden Gesamtmittelwerte darstellen und daß sie sich andererseits in jeweils charakteristischer Weise von einander bzw. vom Gesamtmittelwert unterscheiden.

Außer dem arithmetischen Mittelwerten, die für den Kurs (wegen der linearen Abhängigkeit der $p_o^{(n)}$ -Werte von den $c_j^{(n)}$ -Werten ($j=1, \dots, n!$)) wichtig sind, haben für die Effektivzinssätze die (indirekten) harmonischen Mittelwerte (wegen der Bestimmungsgleichung der Effektivzinssätze in $(1+r_e)$) besondere Bedeutung.

Für die angepaßten Effektivzinssätze sind dagegen (wegen der Formel $r_{eo j}^{(n)} = \frac{\prod_j^{(n)} - 1}{c_j^{(n)}} \quad (j=1, \dots, n!)^1$) die direkten harmonischen Mittelwerte von Interesse.

Bei den arithmetischen Mittelwerten ist in bezug auf die $p_o^{(4)}$ - und $c_j^{(4)}$ -Werte besonders die Übereinstimmung der Mittelwerte für die Permutationspaare 2/5 und 3/4 hervorzuheben. ²⁾

Die gleiche Übereinstimmung besteht zwischen den beiden Permutationspaaren 2/5 und 3/4 hinsichtlich der indirekten harmonischen Mittelung der Effektivzinssätze bei dem konstanten Couponsatz $r_o = 4\%$. Darüberhinaus kommt (Spalte 5) der arithmetische (2/5)-Mittelwert dem indirekten geometrischen Mittelwert r_g (dem $R^{(4)}$ -Wert der klassischen Erwartungstheorie) 0,0399519 am nächsten.

Bei den charakteristischen Effektivzinssätzen ergibt das Permutationspaar 2/5 die besten Näherungswerte für den arithmetischen Gesamt-Mittelwert.

Die Tatsache, daß das Permutationspaar 2/5 bei der arithmetischen bzw. harmonischen (direkten oder indirekten) Mittelung jeweils besonders gute Mittelwerte als Näherungswerte für die entsprechenden Gesamt-Mittelwerte liefert,

- 1) Für den Fall, daß nicht alle n Zinssätze verschieden, sondern wie im obigen Beispiel $\frac{n}{2} = m$ einander gleich sind, läuft j von 1 bis $\binom{2m}{m}$.
- 2) Außerdem ist der arithmetische (2/5) Mittelwert der absolut kleinste Mittelwert. Vgl. S.136 ff.

läßt eine gesonderte Behandlung der alternierenden Folgen, insbesondere auch wegen ihres Verhaltens bei der Laufzeitverlängerung $n=4$ um eine gerade Zahl von Zinsperioden $(6,8,\dots,2m)$ zweckmäßig erscheinen.

Das letzte Argument gilt allerdings auch für die sogenannten monotonen Folgen, d.h. für die Folgen, bei denen - falls $r_1 < r_2$ zutrifft - entweder die erste Hälfte der Folge aus $m (= \frac{n}{2})$ gleichen Einperiodenterminzinssätzen r_1 (r_2) besteht, während die zweite Hälfte aus $m (= \frac{n}{2})$ gleichen Einperiodenterminzinssätzen r_2 (r_1) gebildet wird. Gemäß einer früher getroffenen Vereinbarung - Anordnung der Permutationsfolgen nach dem Absolutbetrag der zugehörigen $c_j^{(n)}$ -Werte ($j=1,\dots,n!$)¹⁾ - erhalten die genannten monotonen Folgen die Nummer 1 (monoton steigende Folge mit dem größten $c^{(n)}$ -Wert) bzw. die Nummer $\binom{2m}{m}$ (monoton fallende Folge mit dem kleinsten $c^{(n)}$ -Wert).

Geht man von den beiden einfachsten alternierenden Zinssatzfolgen $(3,5)$ bzw. $(5,3)$ sowie deren Erweiterung auf $4,6,8$ (allgemein $2m$) Zinsperioden aus, so müßten diese Folgen, wenn man die $c_j^{(n)} (= c_j^{(2m)})$ -Werte in der verabschiedeten Weise bezeichnen würde, ganz verschiedene Indizes (z.B. bei $n=4$ die Indizes 2' und 5, bei $n=6$ die Indizes 6 und 15) erhalten. Deswegen sollen auf der folgenden Seite - in Abänderung der eben gemachten Vereinbarung²⁾ - die alternierenden Folgen zwecks Vereinfachung der Schreibweise die Nummern 1 (für die steigend alternierende Folge, die mit $3/5$ beginnt) bzw. 2 (für die fallend alternierende Folge, die mit $5/3$ beginnt) erhalten.

Für $n=2$ ist (nach Definition des $c^{(n)}$ -wertes)

$$c_1^{(2)} = 1 + 1,05 = \underline{\underline{2,05}}$$

für $c_2^{(2)} = 1 + 1,03 = 2,03$.

1) Vgl. S.107 dieses Abschnittes
2) S. Fußnote 1)

Für $n=4$ ergibt sich einerseits

$$\begin{aligned} c_1^{(4)} &= 1+1,05+1,05 \cdot 1,03+1,05^2 \cdot 1,03 \\ &= \frac{1,0815^2 - 1}{0,0815} (1+1,05) = \frac{1,0815^2 - 1}{0,0815} \cdot \underline{2,05} \end{aligned}$$

und andererseits

$$c_2^{(4)} = \frac{1,0815^2 - 1}{0,0815} \cdot \underline{2,03}.$$

Allgemein findet man für $c_j^{(n)}$ ($j=1,2$; $n=2m$):

$$c_1^{(n)} = \frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,05$$

bzw. also $c_1^{(n)} : c_2^{(n)} = 2,05 : 2,03$ ¹⁾

$$c_2^{(n)} = \frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,03.$$

Da das Produkt $\prod_{i=1}^n (1 + r_i)$ für beide obigen alternierenden Folgen für $n=2m$ in die einfache Form

$$(1+0,03)^m \cdot (1+0,05)^m = 1,03^m \cdot 1,05^m = 1,0815^m$$

übergeht (und zwar unabhängig davon, welche der beiden Folgen vorgegeben wird), ergibt sich für den Quotienten

$$\frac{\prod_{i=1}^{(n)} - 1}{c_j^{(n)}} \quad (j=1,2)$$

(der den sogenannten "angepaßten" Effektivzinssatz definiert) für $n=2m$ ein besonders einfacher Ausdruck, nämlich

$$\text{für } j=1: (1,0815^m - 1) : \left(\frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,05 \right) = \frac{0,0815}{2,05}$$

$$\text{bzw. für } j=2: (1,0815^m - 1) : \left(\frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,03 \right) = \frac{0,0815}{2,03}$$

Somit sind alle $r_{eol}^{(n)}$ -Werte mit geradzahliger Laufzeit $n=2m$ unter sich gleich, und zwar gleich $\frac{0,0815}{2,05}$ und ebenso alle $r_{eo2}^{(n)}$ -Werte, und zwar $= \frac{0,0815}{2,03}$.

1) Vgl. Abschnitt II,2, S. 59

Für die monotonen Folgen, die - gemäß der zuvor getroffenen Vereinbarung über die Indizierung der $c_j^{(2m)}$ -Werte ($j=1, \dots, \binom{2m}{m}$) und die entsprechende Numerierung der Permutationsfolgen - die Nummern 1 bzw. $\binom{2m}{m}$ erhalten müssen, findet man aufgrund der Definition der $c_j^{(n)}$ -Werte die Ausdrücke

$$\begin{aligned} c_1^{(2m)} &= (1 + 1,05 + 1,05^2 + \dots + 1,05^{m-1}) + \\ &\quad + (1,05^m + 1,05^m \cdot 1,03 + \dots + 1,05^m \cdot 1,03^{m-1}) \\ &= \frac{1,05^m - 1}{0,05} + 1,05^m \cdot \frac{1,03^m - 1}{0,03} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} c_{\binom{2m}{m}}^{(2m)} &= (1 + 1,03 + \dots + 1,03^{m-1}) \\ &\quad + (1,03^m + 1,03^m \cdot 1,05 + \dots + 1,03^m \cdot 1,05^{m-1}) \\ &= \frac{1,03^m - 1}{0,03} + 1,03^m \cdot \frac{1,05^m - 1}{0,05} \end{aligned}$$

Die im folgenden Abschnitt zu behandelnden Mittelwerte von Kursen und Effektivzinssätzen ¹⁾, die dem alternierenden (bzw. dem monotonen) Permutationspaar zugehören, lassen sich für die oben betrachteten - aus nur zwei verschiedenen Zinssätzen bestehenden - Folgen (z.B. für die Folge $[3, 3..3 \text{ (m-mal)}/5, 5..5 \text{ (m-mal)}]$ bzw. $[(3, 5, 3, 5..3, 5 \text{ (m-mal)})]$ mit $n = 2m$) verhältnismäßig leicht in geschlossener Form darstellen:

$$\begin{aligned} c_{a, alt.}^{(2m)} &= \left[\frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,05 + \frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,03 \right] : 2 \\ &= \frac{1,0815^m - 1}{0,0815} \cdot 2,04 \end{aligned}$$

1) Vgl. die Abschnitte II,2 bzw. II,3

2) Der Index a,alt. soll die arithmetische Mittelung bedeuten, die Abkürzung "alt" steht für "alternierend".

$$\begin{aligned}
 & 1) \\
 c_{a, \text{mon.}}^{(2m)} &= \left[\left(\frac{1,05^m - 1}{0,05} + 1,05^m \frac{1,03^m - 1}{0,03} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{1,03^m - 1}{0,03} + 1,03^m \frac{1,05^m - 1}{0,05} \right) \right] : 2 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(1,05^m - 1)(1,03^m + 1)}{0,05} + \frac{(1,03^m - 1)(1,05^m + 1)}{0,03} \right].
 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck läßt sich noch etwas weiter umformen, nämlich in

$$\frac{1}{2 \cdot 0,03 \cdot 0,05} [(1,0815^m - 1) \cdot 0,08 - (1,05^m - 1,03^m) \cdot 0,02]$$

1) Die Abkürzung "mon" steht für monoton.

III. Der Mittelwertbegriff bei Zinssätzen, Bestimmungsmethoden mittlerer Kurse und Effektivzinssätze

1. Arten der Mittelwertbildung

Bei der Bestimmung des langfristigen Zinssatzes der klassischen Erwartungstheorie ist an mehreren Stellen dieser Arbeit vom "sogenannten" (= indirekten) geometrischen Mittelwert der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge Gebrauch gemacht worden.¹⁾

Darüberhinaus ist auch vom mittleren Effektivzinssatz bzw. mittleren Kurs gesprochen worden, wobei in jedem Fall, in dem nicht etwas anderes expressis verbis festgelegt war, das charakterisierende Eigenschaftswort "mittlerer" sich auf das Verfahren der arithmetischen Mittelwertbildung bezog.

Bei dem Normalintervall-Modell von Malkiel wird außerdem der Begriff des ("gewogenen") harmonischen Mittels von Bedeutung sein.²⁾

Im Hinblick auf die Besonderheiten der Zinsrechnung spielen in allen drei Fällen - insbesondere beim harmonischen Mittel - neben den betreffenden direkten, d.h. den aus den gegebenen Zinssätzen r_i ($i=1, \dots, n$) selbst errechneten Mittelwerten, auch die entsprechenden indirekten, d.h. die aus den Zinsfaktoren $1+r_i$ gebildeten Mittelwerte eine Rolle.

Im Gegensatz zu den arithmetischen Mittelwerten aber, bei denen sowohl die direkte wie die indirekte Mittelung zu den gleichen Zahlenwerten führt, sind die direkten und indirekten Mittelwerte bei der geometrischen und harmonischen Mittelung wohl zu unterscheiden.

Bezeichnet man die direkten Mittelwerte, da sie weniger häufig verwendet werden, mit dem Doppelindex aM , gM , hM , je nachdem ob der arithmetische, der geometrische oder der harmonische Mittelwert gemeint ist, so sollen die

1) Z.B. ist der zur Zinssatzfolge (5/6/8) des Beispiels von Lutz gehörige "sogenannte" geometrische Mittelwert $r_g = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} - 1$, also der geometrische Mittelwert der Zinsfaktoren 1,05; 1,06; 1,08 abzüglich der Einheit, definitionsgemäß auch der langfristige Zinssatz $R^{(3)}$ der klassischen Erwartungstheorie.

2) Vgl. S.257 der Arbeit, wo dies ausführlich dargelegt wird.

entsprechenden indirekten Mittelwerte (der indirekte geometrische Mittelwert wird auch weiterhin "sogenannter" geometrischer Mittelwert heißen) durch die einfache Indizierung a, g, h gekennzeichnet werden.

Geht man von dem in dieser Arbeit bereits häufig herangezogenen Beispiel zweier Zinssätze $r_1 = 0,03$ und $r_2 = 0,05$ aus, so erhält man entsprechend für das arithmetische bzw. geometrische bzw. harmonische Mittel die Zahlenwerte:

$$r_{aM} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{0,03 + 0,05}{2} = 0,04 \quad ,$$

$$\text{allg. } \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) : n = r_{aM} \quad , \text{ bzw.}$$

$$r_{gM} = \sqrt[n]{r_1 \cdot r_2} = \sqrt[2]{0,03 \cdot 0,05} = 0,0387298 \quad ,$$

$$\text{allg. } \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n r_i} = r_{gM} \quad , \text{ bzw.}$$

$$r_{hM} = \frac{2r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2 \cdot 0,03 \cdot 0,05}{0,08} = 0,0375$$

$$\text{allg. } \frac{n}{r_{hM}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \quad .$$

Aus diesen Werten läßt sich nicht nur die behauptete Beziehung $r_a = r_{aM}$, sondern auch die für $r_i > 0$ gültige Größenbeziehung der Mittelwerte untereinander, nämlich

$$r_{aM} \geq r_{gM} \geq r_{hM}$$

ablesen, wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn alle r_i ($i=1, \dots, n$) unter sich gleich sind.

Wie für die direkten Mittelwerte gilt auch für die indirekten Mittelwerte die der obigen Größenbeziehung entsprechende Ungleichung

$$r_a \geq r_g \geq r_h \quad ,$$

und zwar ergeben sich für r_g , r_a und r_h mit den Zahlenwerten des obigen Beispiels folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{(1+r_1)+(1+r_2)}{2} \\ &= \frac{r_1 + r_2}{2} = 0,04, \text{ bzw.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_g &= \sqrt[2]{(1+r_1)(1+r_2)} - 1 \\ &= \sqrt[2]{1,03 \cdot 1,05} - 1 = 0,0399519, \text{ bzw.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_h &= \frac{2 \cdot (1+r_1)(1+r_2)}{2 + (r_1 + r_2)} - 1 \\ &= \frac{(1+r_1)(1+r_2)}{1 + \frac{r_1+r_2}{2}} - 1 \\ &= \frac{2 \cdot 1,0815}{2,08} - 1 = 0,0399038. \end{aligned}$$

Bei nur 2 zu mittelnden Größen (r_1 , r_2) läßt sich unter der Voraussetzung, daß $r_{aM} \geq r_{gM}$ ist, also der 1. Teil der Größenbeziehung $r_{aM} \geq r_{gM} \geq r_{hM}$ richtig ist (was anschließend sogleich bewiesen werden wird), auch der 2. Teil der Größenbeziehung $r_{aM} \geq r_{gM} \geq r_{hM}$, nämlich $r_{gM} \geq r_{hM}$, unmittelbar aus der bekannten Gleichung

$$r_{aM} = r_{gM}^2 : r_{aM}$$

ableiten. Nach der Definitionsgleichung $r_{hM} = \frac{2r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$

für den direkten harmonischen Mittelwert, die aus

$$\frac{2}{r_{hM}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \text{durch Auflösen nach } r_{hM} \text{ entsteht, läßt}$$

$$\text{sich nämlich } r_{hM} \text{ auch in der Form } r_{hM} = \frac{r_1 \cdot r_2}{\frac{r_1 + r_2}{2}}$$

schreiben. Definitionsgemäß ist $r_1 \cdot r_2 = r_{gM}^2$ und

$\frac{r_1 + r_2}{2} = r_{aM}$, d.h. r_{gM} und r_{aM} genügen der behaupteten Gleichung

$$r_{hM} = r_{gM}^2 : r_{aM} .$$

Formt man diese Gleichung auf der rechten Seite in das Produkt $r_{gM} \cdot \frac{r_{gM}}{r_{aM}}$ um, so erhält man für r_{hM} den Ausdruck

$$r_{hM} = r_{gM} \cdot \frac{r_{gM}}{r_{aM}} .$$

Aus $\frac{r_{gM}}{r_{aM}} \leq 1$ folgt dann unmittelbar $r_{hM} \leq r_{gM}$.

Daß r_{gM} für zwei zu mittelnde Zahlenwerte $r_1 \neq r_2$ ($r_1, r_2 > 0$) tatsächlich kleiner als r_{aM} ist, ergibt sich sofort, wenn man die Quadrate von r_{aM} und von r_{gM} miteinander vergleicht:

$$r_{aM}^2 = \frac{r_1^2}{4} + \frac{r_2^2}{4} + \frac{2r_1 \cdot r_2}{4} , \quad \text{während}$$

$$r_{gM}^2 = r_1 \cdot r_2 \quad \text{ist.}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} r_{aM}^2 - r_{gM}^2 &= \left(\frac{r_1^2}{4} + \frac{r_2^2}{4} + \frac{2r_1 r_2}{4} \right) - r_1 r_2 \\ &= \frac{r_1^2}{4} + \frac{r_2^2}{4} - \frac{2r_1 r_2}{4} = \left(\frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 , \end{aligned}$$

also ist $r_{aM}^2 - r_{gM}^2 > 0$ und somit¹⁾ $r_{aM} > r_{gM}$.

Die entsprechende Verallgemeinerung von zwei zu mittelnden Zahlenwerten auf mehr als zwei Werte ist unter Berücksichtigung der genannten Voraussetzung $r_i \neq r_j$ (für $i \neq j$) und für $r_i > 0$ für ($i=1, \dots, n$) unschwer durchzuführen.

1) da mit $r_i > 0$ ($i=1, 2$) auch r_{aM} und $r_{gM} > 0$ sind

Die analoge Größenbeziehung zwischen den indirekten Mittelwerten $r_a \geq r_g \geq r_h$ unterscheidet sich dadurch von der obigen Größenbeziehung ($r_{aM} \geq r_{gM} \geq r_{hM}$), daß in den indirekten Mittelwerten der r_i -Anteil größenordnungsmäßig nur $\approx 1/100$ des konstanten Anteils (nämlich eins) beträgt. Das bedeutet, daß die indirekten Mittelwerte viel dichter beieinander liegen (0,04/0,0399519/0,399038) als die direkten (0,04/0,03827298/0,0375).

Der Beweis der Gleichheit von r_a und r_{aM} läßt sich mittels der betreffenden allgemeinen Definitionsgleichungen

$$r_{aM} = \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) : n \quad \text{und} \quad r_a = \left(\sum_{i=1}^n (1+r_i) \right) : n - 1$$

leicht führen, denn

$$\sum_{i=1}^n (1 + r_i)$$

läßt sich zerlegen in

$$n + \sum_{i=1}^n r_i ,$$

womit die rechte Seite von

$$r_a = \sum_{i=1}^n (1 + r_i) : n - 1$$

übergeht in

$$\left[n + \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) \right] : n - 1 ,$$

also weiter in

$$1 + \sum_{i=1}^n r_i : n - 1 = \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) : n = r_{aM}.$$

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die direkten Mittelwerte der Zinssätze einer gegebenen Zinssatzfolge, also definitionsgemäß die entsprechenden (arithmetisch, geo-

metrisch, harmonisch) gemittelten Zinsfaktoren abzüglich der Einheit für die verschiedenen Modelle der Zinsrechnung von besonderer Wichtigkeit und Bedeutung (insbesondere für das Normalintervall-Modell von Malkiel sowie für die Bestimmung des mittleren effektiven Zinssatzes) sind.

Bei der näheren Betrachtung der Effektivzinssätze (yield-to-maturity) wird sich zeigen,¹⁾ daß sowohl das direkte harmonische Mittel (bei Konsols, also bei unendlich langer Laufzeit) als auch das indirekte harmonische Mittel (bei einer Ein-Perioden-Laufzeit) eine besondere Rolle spielen. Neben den ungewogenen (harmonischen) Mittelwerten können aber auch - wenn die Wahrscheinlichkeit für die Zinserwartung nicht gleichmäßig über ein bestimmtes Intervall verteilt ist - die gewichteten (harmonischen) Mittelwerte bei der Berechnung der dafür charakteristischen Effektivzinssätze von Interesse sein. Dabei wird angenommen, daß der Begriff der Gewichtung aus der Bestimmung des gewichteten arithmetischen Mittelwertes bekannt ist

$$r_{AM}(gew.) = \left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot r_i \right) : \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot r_i$$

(wobei w_i die Wahrscheinlichkeit für die Erwartung von r_i und $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ist).

Die völlig analogen Definitionsgleichungen für das gewichtete indirekte bzw. direkte harmonische Mittel lauten somit

$$a) \frac{1}{1+r_h(gew.)} = \frac{w_1}{1+r_1} + \frac{w_2}{1+r_2} + \dots + \frac{w_n}{1+r_n} \quad \left(\text{mit } \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right)$$

bzw.

$$b) \frac{1}{r_{hM}(gew.)} = \frac{w_1}{r_1} + \dots + \frac{w_n}{r_n} \quad \left(\text{mit } \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right)$$

1) Vgl. den Abschnitt "Das Normalintervall-Modell von Malkiel", S. 239

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß es unzulässig ist, bei Auf- oder Abzinsung über längere Zeiträume, d.h. über eine größere Anzahl von Zinsperioden hinweg, statt des sog. (oder indirekten) geometrischen Mittels, d.h. des geometrischen Mittels der Zinsfaktoren - 1, das arithmetische Mittel r_a zu verwenden.

Auch bei kürzeren Laufzeiten muß man sich in jedem Einzelfall klarmachen, von welcher Größenordnung der gemachte Fehler ist, wenn man r_g durch das entsprechende r_a ersetzt.

Wird zur Begründung der Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen r_g und r_a die Behauptung - und zwar in allgemeiner Form und ohne Einschränkung - aufgestellt, der sogenannte geometrische Mittelwert unterscheide sich vom arithmetischen Mittelwert umso weniger, je größer die Anzahl der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge sei (und strebe mit wachsendem n unbegrenzt gegen ∞), so ist diese Behauptung falsch. ¹⁾

Ein einfaches Gegenbeispiel läßt die Unrichtigkeit dieser Behauptung sogleich erkennen.

1) Höffer, Herbert, Die Zinsstruktur in der Bundesrepublik Deutschland, Diss. Nürnberg 1975, S. 12-13:
"Bei der Berechnung der Strategieverzinsungen wird hier im Gegensatz zur vielfach üblichen Praxis nicht Zinsseszinsrechnung, sondern nur einfache Zinsrechnung unterstellt. Manche Probleme sind dadurch einfacher zu behandeln. Wood hat gezeigt, daß die Unterschiede sehr gering sind und umso kleiner werden, je größer die Restlaufzeit i ist."

Die Anwendung der Zinsrechnung statt der Zinsseszinsrechnung läßt sich nur zum Zwecke der Vereinfachung rechtfertigen. Vgl. dazu Neumann, M., Theoretische Volkswirtschaftslehre I, Heidelberg 1973, S. 233: "Sieht man zur Vereinfachung von Zinsseszinsen ab ..."

Besteht nämlich die gegebene Zinssatzfolge aus nur zwei verschiedenen Zinssätzen, die sich alternierend beliebig oft wiederholen: z.B. 0,03; 0,05; 0,03; 0,05 ad infinitum¹⁾, so ist zunächst klar, daß alle Teilfolgen dieser Folge mit gerader Gliederzahl einerseits den gleichen arithmetischen Mittelwert, nämlich $r_a = 0,04$, andererseits aber auch den gleichen (indirekten) geometrischen Mittelwert, nämlich

$$\begin{aligned} r_g &= \sqrt[2]{1,03 \cdot 1,05} - 1 \\ &= \sqrt[4]{(1,03 \cdot 1,05)^2} - 1 \\ &= \sqrt[6]{(1,03 \cdot 1,05)^3} - 1 \end{aligned}$$

usw.

also allgemein

$$\begin{aligned} r_g^{(2n)} &= \sqrt[2n]{(1,0815)^n} - 1 \\ &= \sqrt[2]{1,0815} - 1 = 0,0399519 \quad \text{haben.} \end{aligned}$$

Betrachtet man nur Teilfolgen mit gerader Gliederzahl, so ist ersichtlich die Differenz ihrer arithmetischen bzw. (indirekten) geometrischen Mittelwerte konstant.²⁾

Es kann also keine Rede davon sein, daß der arithmetische Mittelwert sich dem (sog.) geometrischen mit wachsender Gliederzahl annähert.

1) Statt dieser Zinssatzmenge könnte auch irgendeine andere betrachtet werden, die wie die obige 2 diskrete Häufungspunkte besitzt.

2) Entsprechendes gilt natürlich auch für die direkten geometrischen Mittelwerte, denn für sie gilt

$$\begin{aligned} &\sqrt[2]{0,03 \cdot 0,05} = \\ &\sqrt[4]{(0,03 \cdot 0,05)^2} = \\ &\sqrt[6]{(0,03 \cdot 0,05)^3} \end{aligned}$$

usw.

also allgemein

$$\begin{aligned} r_{gM}^{(n)} &= \sqrt[2m]{(0,03 \cdot 0,05)^m} \\ &= \sqrt[2]{0,0015} = 0,0387298 \\ &\text{für alle } n = 2m \end{aligned}$$

Auch für die Teilfolgen mit ungerader Gliederzahl $n = 2m + 1$ gilt, daß ihre entsprechenden arithmetischen bzw. geometrischen Mittelwerte in der Grenze gegen die gleichen Mittelwerte bzw. $0,0399519$ streben wie die Teilfolgen mit gerader Gliederzahl gegen die gleiche (konstante) Differenz $0,04 - 0,0399519 = 0,0000481$.

Geht man sukzessiv ($m = 1, m = 2$ usw.) vor, so kommt es zunächst darauf an, ob die ursprüngliche Folge F mit dem Glied $0,03$ oder mit dem Glied $0,05$ beginnt.

Bezeichnet man die mit $0,03$ beginnende unendliche Folge $0,03; 0,05; 0,03$ usw. mit F_1 und ihre Teilfolgen mit der Mächtigkeit n entsprechend mit F_{1n} , die unendliche Folge $0,05; 0,03; 0,05$ usw. mit F_2 bzw. deren Teilfolgen (Mächtigkeit n) mit F_{2n} , so findet man für den direkten und den indirekten arithmetischen Mittelwert

$$r_{aM}^{(3)} = r_a^{(3)} = \frac{0,03+0,05+0,03}{3} = 0,04 - \frac{0,01}{3}$$

Allgemein gilt für F_{1n} (mit $n = 2m + 1$) die Beziehung:

$$r_a^{(2m+1)} = \frac{(0,03+0,05) \cdot n - 0,01}{2m+1} = 0,04 - \frac{0,01}{2m+1}$$

Dagegen ergibt sich für den (indirekten) geometrischen Mittelwert $r_g^{(3)}$ von F_{13} die Gleichung

$$\begin{aligned} r_g^{(3)} &= \sqrt[3]{1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,03} - 1 \\ &= \sqrt[3]{1,0399519^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{1,03}{1,05}} - 1 \end{aligned}$$

Der Beweis hierfür wird auf der nächsten Seite in der Fußnote 1) geführt.

Allgemein:

$$F_{1,2m+1} \quad r_g^{2m+1} = \frac{n=2m+1}{\sqrt{1,0399519^{2m+1}}} \cdot 2n \sqrt{\frac{1,03}{1,05}} - 1$$

$$F_{2,2m+1} \quad r_g^{2m+1} = \frac{n=2m+1}{\sqrt{1,0399519^{2m+1}}} \cdot 2n \sqrt{\frac{1,05}{1,03}} - 1$$

1) Beweis für

$$\sqrt[3]{1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,03} \quad \text{Beh.} \quad = \sqrt[3]{1,0399519^3} \cdot 6 \sqrt[6]{\frac{1,03}{1,05}} - 1$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,03} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,03 \cdot 1,05}{1,05}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{(1,03 \cdot 1,05)^2}{1,05}} \quad , \text{ wo } \left[2 \sqrt{1,03 \cdot 1,05} = 1,0399519 \right] \text{ ist} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1,0399519^4}{1,05}} \\ &= \sqrt[3]{1,0399519^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1,0399519}{1,05}} \\ &= \sqrt[3]{1,0399519^3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1,03 \cdot 1,05}{1,05^2}}} \\ &= 1,0399519 \cdot 6 \sqrt[6]{\frac{1,03}{1,05}} \end{aligned}$$

a) Entwickelt man

$$\left(\frac{1,03}{1,05}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(1 - \frac{0,02}{1,05}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(1 - \frac{2}{105}\right)^{\frac{1}{6}}$$

in eine binomische Reihe, so heißen die vier ersten Glieder dieser Reihe

$$\begin{array}{ccc} 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{105}\right)} & - \underbrace{\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{105^2}\right)} & - \underbrace{\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{105^3}\right)} \\ 0,0031746 & 0,0000251 & 0,0000002 \end{array}$$

(wobei das 4. Glied mit dem Absolutbetrag

$$\frac{55}{2 \cdot 3^4 \cdot 105^3} = 0,0000002 \text{ bereits praktisch bedeutungslos ist}).$$

Danach ist

$$\begin{aligned} r_g^{(3)} &= 0,03 = 0,0399519 - 1,0399519 \\ &\quad \cdot \underbrace{(0,0031746 + 0,0000251 + 0,0000002)}_{0,0031999} \\ &= 0,0399519 - 0,0033277 \end{aligned}$$

und die Differenz

$$r_a^{(3)} - r_g^{(3)} = \left(0,04 - \frac{0,01}{3}\right) - (0,0399519 - 0,0033277)$$

setzt sich aus der Grunddifferenz

$$0,04 - 0,0399519 = 0,0000481$$

und dem Ausdruck

$$-(0,0033333 - 0,0033277) = -0,0000056$$

zusammen, ist also um 0,0000056 kleiner als die Grunddifferenz $D_{ag} = 0,0000481$, die gleichzeitig Grenzdifferenz aller Teilsummen aus F_1 mit ungerader Gliederzahl und konstante Mittelwertdifferenz aller Teilsummen aus F_1 (und F_2) mit gerader Gliederzahl ist.

Für $D_{ag}^{(3)}$, $D_{ag}^{(5)}$ usw. ergeben sich der Reihe nach folgen-

de Werte:

$$D_{ag}^{(3)} = D_{ag} - 0,0000056$$

$$D_{ag}^{(5)} = D_{ag} - 0,0000019$$

$$D_{ag}^{(8)} = D_{ag} - 0,0000006$$

$$D_{ag}^{(17)} = D_{ag} - 0,0000002$$

b) Für den direkten (= indirekten) arithmetischen Mittelwert der Teilfolgen mit ungerader Gliederzahl der Folge F_2 , d.h. der mit 0,05 beginnenden unendlichen Folge 0,05; 0,03; 0,05 usw., erhält man (zunächst für $m = 1$, also für $n = 2m + 1 = 3$)

analog zu a)

$$r_a^{(3)} = r_{aM}^{(3)} = \frac{0,05+0,03+0,05}{3} = \frac{3 \cdot 0,04+0,01}{3} \\ = 0,04 + \frac{0,01}{3}$$

$$(\text{allgemein also } r_a^{(2m+1)} = r_{aM}^{(2m+1)} = 0,04 + \frac{0,01}{2m+1}).$$

Ebenso erhält man (wie unter a)) den entsprechenden indirekten geometrischen Mittelwert

$$r_g^{(3)} = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,03 \cdot 1,05} - 1 = \sqrt[3]{1,0399519^3 \cdot \frac{1,0399519}{1,03}} - 1 \\ = 1,0399519 \cdot \left(\frac{1,05}{1,03}\right)^{\frac{1}{6}} - 1$$

von $F_{2,3}$.

Entwickelt man wieder

$$\left(\frac{1,05}{1,03}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(1 + \frac{0,02}{1,03}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(1 + \frac{2}{103}\right)^{\frac{1}{6}}$$

binomisch, so erhält man - bei Vernachlässigung der 5. und der weiteren Glieder dieser Entwicklung

$$1 + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{103}}_{0,0032362} - \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{103^2}}_{0,0000261} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{6} \cdot \frac{8}{103^3}}_{0,0000003},$$

also

$$r_g^{(3)} = 0,0399519 + 1,0399519 \cdot 0,0032362 = 0,0399519 + 0,0033385$$

Aus

$$r_a^{(3)} - r_g^{(3)} = (0,04 + 0,0033333) - (0,0399519 + 0,0033385) \\ = 0,0000481 - 0,0000052$$

erkennt man,

daß bei den F_2 -Teilfolgen die Differenz $D_{ag}^{(3)}$ (allgemein $D_{ag}^{(2m+1)}$) ebenfalls kleiner als die Grunddifferenz $D_{ag} = 0,0000481$ ist, nämlich $D_{ag}^{(3)} = D_{ag} - 0,0000052$.

Wie bei den F_1 -Teilfolgen nähert sich auch hier die Differenz $D_{ag}^{(2m+1)}$ mit wachsendem $n = 2m + 1$ asymptotisch der Grunddifferenz $D_{ag} = 0,0000481$.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß (auch bei den Teilfolgen mit ungerader Gliederzahl) die beiden für die Bestimmung des Effektivzinssatzes (yield-to-maturity) ermittelten Mittelwerte, nämlich der "sogenannte" geometrische (richtiger indirekte geometrische) Mittelwert für die Zinseszinsrechnung bzw. der arithmetische Mittelwert für die einfache Zinsrechnung, mit wachsender (Rest-) Laufzeit sich einander nicht annähern, sondern daß bei den Teilfolgen mit gerader Gliederzahl der Unterschied zwischen dem sogenannten geometrischen und dem arithmetischen Mittelwert unabhängig von der Laufzeit konstant ist. Für Teilfolgen mit ungerader Gliederzahl wächst dieser Unterschied sogar noch statt abzunehmen und nähert sich mit zunehmender Laufzeit n asymptotisch der konstanten Differenz der Mittelwerte bei den Teilfolgen mit gerader Gliederzahl.

Der mittlere Kurs

Im Abschnitt II,6 wurde dargestellt, daß der Effektivzinssatz von der Anordnung der Terminzinssätze r_i ($i=1, \dots, n$) abhängt, und zwar ergaben sich bei einer gegebenen Zinssatzfolge r_i ($i=1, \dots, n$), falls alle Zinssätze voneinander verschieden sind, $n!$ verschiedene Effektivzinssätze. Wie bei der Einführung des Begriffes "vereinfachtes Rechenverfahren" ¹⁾ für die Bestimmung des mittleren Effektivzinssatzes zu zeigen sein wird, besteht die "Vereinfachung" darin, nicht die $n!$ verschiedenen (zu den $n!$ verschiedenen Kursen gehörigen) Effektivzinssätze einzeln zu bestimmen, um sie dann arithmetisch, geometrisch oder harmonisch zu mitteln, sondern zuerst die $n!$ verschiedenen Kurse, die zu den $n!$ verschiedenen $c_j^{(n)}$ -Werten ($j=1, \dots, n!$) gehören, zu mitteln und dann die jeweils zu diesen mittleren Kursen P_{oa}, P_{ogM}, P_{ohM} ²⁾ gehörigen Effektivzinssätze $r_{ea}^*, r_{egM}^*, r_{ehM}^*$ ²⁾ zu bestimmen.

Grundsätzlich wird - abgesehen vom arithmetisch gemittelten Kurs $P_{oa}^{(n)} = P_{oa}^{(n)*}$, bei dem die Begriffe direktes und indirektes, d.h. durch eine vorgezogenen $c_j^{(n)}$ -Wert-Mittelung wesentlich vereinfachtes Verfahren zusammenfallen - zwischen einer unmittelbaren (oder direkten) und einer mittelbaren (oder indirekten) Bestimmungsmethode ³⁾ für den Kurs bzw. den Effektivzinssatz zu unterscheiden sein, wobei die Art der Mittelung der zu bestimmenden Größen durch den Index $a, g, (gM), h, (hM)$ - gemäß der in Abschnitt III,1 getroffenen Vereinbarung - und die Vereinfachung des Rechenverfahrens (Vorziehen der Mittelwertbildung) bei der mittelbaren (oder indirekten) Methode durch einen an das Kurs-(Effektivzinssatz-)Symbol gesetzten Stern bezeichnet werden soll. Die Methode, den mittleren Kurs $P_{oa}^{(n)}$ nicht als direkt gemittelten, sondern als indirekt gemittelten Kurs $P_{oa}^{(n)*}$ zu bestimmen,

1) Vgl. Abschnitt III,3, S. 142

2) S. Tab. III-3-1., S. 147

3) Bei der Mittelung mit Hilfe des vereinfachten Rechenverfahrens wird die Ausdrucksweise "indirekt gemittelt" (entsprechend beim nicht vereinfachten Rechenverfahren der Ausdruck "direkt gemittelt") benutzt, um eine Verwechselung mit den Begriffen direkten (bzw. indirekter) Mittelwert (s. Abschnitt III,1) auszuschließen.

erfährt seine Berechtigung aus der Tatsache, daß zwischen den Kursen $p_{oj}^{(n)}$ ($j=1, \dots, n!$) und den $c_j^{(n)}$ -Werten ($j=1, \dots, n!$) eine lineare Beziehung besteht, so daß tatsächlich der durch direkte arithmetische Mittelung aus den $n!$ verschiedenen Kursen erhaltene direkt gemittelte Kurs und der über die Mittelung der $c_j^{(n)}$ -Werte ($j=1, \dots, n!$) errechnete indirekt gemittelte Kurs zahlenmäßig bis auf Ungenauigkeiten, die aus Abrundungen beim Rechnen resultieren, übereinstimmen müssen.

Für den Fall einer Zinssatzfolge von nur zwei Einperioden-terminzinssätzen $r_1 = 0,03$ und $r_2 = 0,05$ mit den $c_j^{(2)}$ -Werten ($j=1,2$) $c_1^{(2)} = 2,05$ bzw. $c_2^{(2)} = 2,03$ findet man die beiden $p_{oj}^{(2)}$ -Werte ($j=1,2$)

$$p_{o1}^{(2)} = \frac{1 + r_o \cdot 2,05}{1,0815} \quad \text{bzw.} \quad p_{o2}^{(2)} = \frac{1 + r_o \cdot 2,03}{1,0815}$$

und somit für den direkt gemittelten Kurs $r_o p_{oa}^{(2)}$ den Wert

$$r_o p_{oa}^{(2)} = \left(\frac{1 + r_o \cdot 2,05}{1,0815} + \frac{1 + r_o \cdot 2,03}{1,0815} \right) : 2$$

bzw. für den indirekt gemittelten Kurs den Wert

$$r_o p_{oa}^{(2)*} = \frac{1 + r_o \cdot \frac{2,05 + 2,03}{2}}{1,0815}$$

die offenbar identisch sind.

In Zukunft wird also bei den Kursen²⁾ der "Stern" fortgelassen.

Die Tatsache, daß - wegen der linearen Abhängigkeit der $p_{oj}^{(n)}$ - und der $c_j^{(n)}$ -Werte voneinander - der Begriff direkt gemittelter Kurs im Sinne eines arithmetischen Mittelwertes von $n!$ verschiedenen Einzelkursen und der Begriff indirekt gemittelter Kurs übereinstimmen, legt es nahe,

- 1) Eine ebensolche Beziehung besteht zwischen $r_o p_o^{(n)}$ - und r_o -Werten bei konstantem $c^{(n)}$ -Wert.
- 2) soweit es sich um die Bestimmung des arithmetischen Mittelwertes handelt

in Zukunft den mittleren Kurs nur noch indirekt, d.h. aus der Gleichung

$$p_{oa}^{(n)} = \frac{1 + r_o \cdot c_a^{(n)}}{\prod(n)}$$

zu berechnen, wo $c_a^{(n)}$ der arithmetische Mittelwert aus den $c_j^{(n)}$ ($j=1, \dots, n!$) ist.

Die $n!$ verschiedenen $c_j^{(n)}$ -Werte, die zu den $n!$ verschiedenen Permutationen der n als verschieden angenommenen Einperiodenterminzinssätze der gegebenen Zinssatzfolge r_i ($i=1, \dots, n$) gehören, also die

$$c_j^{(n)} = 1 + (1+r_{n,j}) + (1+r_{n,j})(1+r_{n-1,j}) + \dots + (1+r_{n,j}) \dots (1+r_{2,j}),$$

wo j eine ganz bestimmte der $n!$ möglichen Permutationen bedeutet, sind in dem Abschnitt II,6 behandelt und für einige Beispiele tabellarisch zusammengestellt worden.

So bezieht sich Tabelle II-6-2¹⁾ auf das Beispiel von Lutz mit der Zinssatzfolge (5/6/8).

Der Mittelwert $c_a^{(3)}$ aller $3! = 6$ verschiedenen

$c_j^{(3)}$ -Werte ($j=1 \dots 6$) ist mit den Zahlenwerten des obigen

Beispiels $\left[\sum_{j=1}^6 c_j^{(3)} \right] : 6 =$

$$\begin{aligned} & \left[(1+1,08+1,08 \cdot 1,06) + (1+1,06+1,06 \cdot 1,08) + (1+1,08+1,08 \cdot 1,05) \right. \\ & \quad + (1+1,05+1,05 \cdot 1,08) + (1+1,06+1,05 \cdot 1,06) \\ & \quad \left. + (1+1,05+1,05 \cdot 1,06) \right] : 6 \\ & = (6+2,3,19+2,3,3918) : 6 \\ & = 3,1939\bar{3}. \end{aligned}$$

Allgemein, d.h. für die sechs verschiedenen Permutationen der Zinssatzfolge (r_1, r_2, r_3) erhält man

$$\begin{aligned} & \left(6+2 \sum_{i=1}^3 (1+r_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ k=1(i \neq k)}}^3 (1+r_i)(1+r_k) \right) : 6 \\ & = (6+6+2 \sum_{i=1}^3 r_i + 6+4 \sum_{i=1}^3 r_i + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ k=1(i \neq k)}}^3 r_i \cdot r_k) : 6 \end{aligned}$$

1) Vgl. S. 105

$$\begin{aligned}
 &= 3 + \sum_{i=1}^3 r_i + \frac{1}{6} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^3 r_i \cdot r_k \\
 &= 3 + 3 \cdot r_a + \frac{1}{6} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^3 r_i \cdot r_k
 \end{aligned}$$

Mit den Werten $r_1 = 0,05$; $r_2 = 0,06$; $r_3 = 0,08$ ergibt das

wegen $\frac{0,05 + 0,06 + 0,08}{3} = \frac{0,19}{3}$

und

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^3 r_i \cdot r_k &= 2(0,05 \cdot 0,06 + 0,05 \cdot 0,08 + 0,06 \cdot 0,08) \\
 &= 2 \cdot 0,0118
 \end{aligned}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 c_a^{(3)} &= 1 + 3 \cdot \frac{0,19}{3} + \frac{2}{6} \cdot 0,0118 \\
 &= 1 + 0,19 + 0,0039\bar{3} = 3,1939\bar{3}.
 \end{aligned}$$

Daraus errechnet sich (indirekt) der mittlere Kurs

$$r_o^{P(3)} = \frac{1 + r_o \cdot 3,1939\bar{3}}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} = \frac{1}{1,20204} + r_o \frac{3,1939\bar{3}}{1,20204}.$$

Im vollständigen Beispiel von Lutz (einschließlich des Couponsatzes von $r_o = 5\%$) ergibt das einen mittleren Kurs

$${}_5P_{oa}^{(3)} = 0,9647737$$

wozu ein (indirekt gemittelter) Effektivzinssatz von ${}_5r_{ea}^{(3)*} = 0,063258$ gehört.

Würde man zu der Mittelung der $c_j^{(3)}$ -Werte i.S. einer angenäherten arithmetischen Mittelung nur den ersten, d.h. größten, weil er zu der monoton steigenden Zinssatzfolge

(5/6/8) gehört, und den letzten, d.h. kleinsten, weil er zu der monoton fallenden Zinssatzfolge (8/6/5) gehört, $c_j^{(3)}$ -Wert ($j=1\dots 6$) heranziehen, so würde man statt des obigen Mittels $c_a^{(3)} = 3,1939\overline{3}$ den Wert $c_a^{(3)*} = 3,1939$ ¹⁾ erhalten, ein Wert, der sich nicht sehr stark von dem "richtigen" $c_a^{(3)}$ -Wert unterscheidet.

Liegt eine Zinssatzfolge von drei voneinander verschiedenen Einperiodenterminzinssätzen r_1, r_2, r_3 vor, von denen r_1 der kleinste und r_3 der größte Zinssatz sein möge, so läßt sich der dritte Zinssatz r_2 ($r_1 < r_2 < r_3$) so bestimmen, daß der Mittelwert aus den $3! = 6$ $c_j^{(3)}$ -Werten, die den sechs verschiedenen Permutationen von r_1, r_2, r_3 entsprechen, mit dem arithmetischen Gesamt-Mittelwert aus allen $c_j^{(3)}$ -Werten übereinstimmt, wenn man den aus $c_1^{(3)}$ und $c_6^{(3)}$ gebildeten Zweier-Mittelwert $(c_1^{(3)} + c_6^{(3)}) : 2$ benutzt. Dabei ist der Index 1 der monoton steigenden Zinssatzfolge r_1, r_2, r_3 , der Index 6 der monoton fallenden Zinssatzfolge r_3, r_2, r_1 zugeordnet.

Es zeigt sich, daß der dann durch r_1 und r_3 mitbestimmte Einperiodenterminzinssatz r_2 genau das direkte harmonische Mittel aus r_1 und r_3 sein muß, d.h. es muß gelten:

$$r_2 = \frac{r_1 \cdot r_3}{\frac{r_1 + r_3}{2}}.$$

Im obigen Beispiel $r_1=5\%$, $r_3=8\%$ muß also, falls

$$\frac{c_1^{(3)} + c_6^{(3)}}{2} = \left(\sum_{j=1}^6 c_j^{(3)} \right) : 6$$

sein soll, r_2 den Wert

1) Der Stern bei $c_a^{(3)*}$ soll bedeuten, daß $c_a^{(3)*}$ ein Näherungswert für $c_a^{(3)}$ ist.

$$\frac{2 \cdot 0,05 \cdot 0,08}{0,05 + 0,08} = \frac{0,008}{0,013} = 0,615384$$

haben.

Beweis: (r_2 wird zunächst gleich x gesetzt)

$c_1^{(3)} = 1 + (1+r_3) + (1+r_3)(1+x)$	Zins.Folge:	r_1, x, r_3
$c_2^{(3)} = 1 + (1+x) + (1+x)(1+r_3)$	" "	r_1, r_3, x
$c_3^{(3)} = 1 + (1+r_3) + (1+r_3)(1+r_1)$	" "	x, r_1, r_3
$c_4^{(3)} = 1 + (1+r_1) + (1+r_1)(1+r_3)$	" "	x, r_3, r_1
$c_5^{(3)} = 1 + (1+x) + ((1+x)(1+r_1)$	" "	r_3, r_1, x
$c_6^{(3)} = 1 + (1+r_1) + (1+r_1)(1+x)$	" "	r_3, x, r_1

$$\sum_{j=1}^6 c_j^{(3)} = 6 + 6 + 2(r_1 + r_3 + x) + 6 + 4(r_1 + r_3 + x) + 2(r_1 + r_3) \cdot x + 2 \cdot r_1 \cdot r_3$$

Daraus folgt

$$\left(\sum_{j=1}^6 c_j^{(3)} \right) : 6 = 3 + (r_1 + r_3) + x \left(1 + \frac{r_1 + r_3}{3} \right) + \frac{r_1 \cdot r_3}{3} .$$

Bildet man nur aus $c_1^{(3)}$ und $c_6^{(3)}$ den Zweier-Mittelwert

$c_{(1,6)}^{(3)}$, so erhält man aus

$$c_1^{(3)} = 1 + (1+r_3) + (1+r_3)(1+x)$$

bzw.

$$c_6^{(3)} = 1 + (1+r_1) + (1+r_1)(1+x)$$

$$\text{für } c_{(1,6)}^{(3)} = \frac{c_1^{(3)} + c_6^{(3)}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{den Wert } & \left[2 + (2+r_1+r_2) + 2 + (r_1+r_2) + x(2+r_1+r_2) \right] : 2 \\ & = 3 + (r_1+r_2) + x \cdot \left(1 + \frac{r_1+r_2}{2} \right) . \end{aligned}$$

Gleichsetzung von $c_{(1,6)}^{(3)}$ und $c_a^{(3)}$ liefert

$$3+(r_1+r_2)+x(1+\frac{r_1+r_2}{2}) = 3+(r_1+r_2)+\frac{r_1 \cdot r_3}{3} +x(1+\frac{r_1+r_2}{3}),$$

woraus

$$x(\frac{r_1+r_2}{2} - \frac{r_1+r_2}{3}) = \frac{r_1 \cdot r_3}{3} \text{ oder } x \frac{r_1+r_2}{6} = \frac{r_1 \cdot r_3}{3} \text{ folgt.}$$

Also ist

$$x(=r_2) = \frac{r_1 \cdot r_3}{3} : \frac{r_1+r_3}{6} = \frac{r_1 \cdot r_3}{\frac{r_1+r_3}{2}}.$$

Bei längeren Zinssatzfolgen ¹⁾ gibt es, um verhältnismäßig rasch zu einem Näherungswert (für einen der Mittelwerte) zu kommen, praktisch nur ein Auswahlprinzip: die Beschränkung der möglichen Permutationen auf einige wenige, als charakteristisch anzusehende Fälle, die zur Berechnung eines angenäherten arithmetischen ²⁾ Mittelwertes heranzuziehen sind.

Insbesondere ergibt das Beispiel von nur zwei voneinander verschiedenen, aber in gleicher Häufigkeit $\frac{n}{2} = m$ auftretenden Einperiodenterminzinssätzen, bei denen die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten ($\binom{2m}{m}$) beträgt, zwei besonders charakteristische Paare von Zinssatzfolgen, nämlich 1. das Paar der zwei alternierenden Folgen 3,5,3,5,... (steigend alternierende Folge) und 5,3,5,3,... (fallend alternierende Folge), sowie 2. das Paar der zwei monotonen Folgen 3,3,...,3, 5,5,...,5 (steigend monotone Folge) (m-mal) (m-mal) bzw. 5,5,...,5, 3,3,...,3 (fallend monotone Folge). (m-mal) (m-mal)

Dieses Beispiel ist zunächst für die Laufzeit $n=4$ im Anschluß an die Tabelle II-6-3 ³⁾ behandelt worden. Dabei wurde das Verhalten der Permutationspaare und ihrer Mittelwerte (1/6, 2/5, 3/4) hinsichtlich ihrer Abweichung vom

1) d.h. für eine Laufzeit $n \geq 4$, da 4! bereits = 24 ist.

2) oder anderen (geometrischen, harmonischen usw.)

3) Vgl. S.108

Gesamtmittelwert untersucht.

Am Schluß des gleichen Abschnittes wurden auch die allgemeinen Formeln für $n=2m$ (Verlängerung der Laufzeit $n=4$ um eine gerade Anzahl von Zinsperioden), und zwar sowohl für die $c_j^{(n)}$ -Werte, als auch für die arithmetischen Teil-Mittelwerte der alternierenden bzw. monotonen Permutationspaarfolgen angegeben. Wichtig erscheint dabei die Feststellung, daß bei der Berechnung des arithmetischen Gesamt-Mittelwertes das alternierende Permutationspaar $2/5$ insbesondere für die charakteristischen Zinssätze die besten Ergebnisse liefert ¹⁾, eine Tatsache, die verständlich wird, wenn man neben den Werten der arithmetischen Mittelung (Gesamt- bzw. Teil-Mittelwerte) auch die entsprechenden Werte der direkten harmonischen Mittelung bei den $c_j^{(n)}$ -Werten (Spalte 3, Tab. II-6-3) berücksichtigt.

Vergleicht man die direkten harmonischen Mittelwerte der Permutationspaare $1/6$, $2/5$, $3/4$ mit dem entsprechenden Gesamt-Mittelwert, so stellt man im Gegensatz zu den arithmetischen Mittelwerten, bei denen die Permutationspaare $2/5$, $3/4$ gleich gute Näherungswerte lieferten, fest, daß der direkte harmonische $(2/5)$ -Mittelwert $4,246159$ den direkten harmonischen Gesamt-Mittelwert $c_{HM}^{(4)} = 4,2461581$ wesentlich besser annähert als die $(3/4)$ - bzw. $(1/6)$ -Mittelwerte. Daß eine ähnlich gute Annäherung des $(2/5)$ -Mittelwertes an den Gesamt-Mittelwert wie hier auch bei den angepaßten Effektivzinssätzen vorhanden ist (der arithmetische $2/5$ -Mittelwert $0,03995185$ unterscheidet sich vom arithmetischen Gesamt-Mittelwert $0,03995188$ kaum), liegt zum einen daran, daß in dem Ausdruck für den arithmetischen $2/5$ -Mittelwert des angepaßten Effektivzinssatzes $r_{eo(2/5)}^{(4)} = (\Pi^{(4)} - 1) \left(\frac{1}{c_2^{(4)}} + \frac{1}{c_5^{(4)}} \right) \cdot \frac{1}{2}$ der durch

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_2^{(4)}} + \frac{1}{c_5^{(4)}} \right)$$
 definierte direkte harmonische $(2/5)$ -

1) Zum alternierenden Permutationspaar gehört stets das absolut kleinste arithmetische Mittel der $c_j^{(2m)}$ -Werte ($j=1 \dots \binom{2m}{m}$). Vgl. S. 141

Mittelwert der $c_j^{(4)}$ -Werte eingeht. Andererseits ist der zweite Faktor des arithmetischen Gesamt-Mittelwertes

$$r_{\text{eoa}}^{(4)} = (\Pi^{(4)} - 1) \left(\frac{1}{c_1^{(4)}} + \frac{1}{c_2^{(4)}} + \frac{1}{c_3^{(4)}} + \dots + \frac{1}{c_6^{(4)}} \right) : 6$$

genau dem entsprechenden direkten harmonischen Mittel $c_h^{(4)}$ in

$$\frac{6}{c_h^{(4)}} = \frac{1}{c_1^{(4)}} + \frac{1}{c_2^{(4)}} + \dots + \frac{1}{c_6^{(4)}} \quad \text{gleich.}$$

Man stellt also fest, daß weitgehende Analogie besteht zwischen den direkten harmonischen Mittelwerten (Teil- bzw. Gesamt-Mittelwerten) der $c_j^{(4)}$ ($j=1\dots 6$)-Werte der Spalte 3 und den entsprechenden arithmetischen Mittelwerten des angepaßten Effektivzinssatzes in Spalte 6.

Da - wie hier zuvor gezeigt worden ist - der indirekt arithmetisch gemittelte Kurs $p_{\text{oa}}^{(n)*}$, d.h. die Berechnung des arithmetischen Kursmittelwertes mit Hilfe der arithmetisch gemittelten $c_j^{(n)}$ ($j=1\dots 6$)-Werte durch die Gleichung

$$r_o p_{\text{oa}}^{(n)*} = \frac{1 + r_o \cdot c_a^{(n)}}{\Pi^{(n)}} ,$$

wo $c_a^{(n)}$ den arithmetisch gemittelten $c^{(n)}$ -Wert darstellt, völlig mit dem direkt arithmetisch gemittelten Kurs $p_{\text{oa}}^{(n)}$ übereinstimmt, spielt für die Frage nach diesem mittleren Kurs das Verfahren der Mittelung (harmonisch, geometrisch oder arithmetisch) keine Rolle.

Der Anteil, den die Mittelwerte der Beiden besonders hervorgehobenen Permutationspaare 2/5 (alternierende Folge) und 1/6 (monotone Folge) bei den $c_j^{(4)}$ -Werten und damit bei den Kursen zum arithmetischen Gesamt-Mittelwert $p_{\text{oa}}^{(4)}$ (bzw. $c_a^{(4)}$) beitragen, ist von verschiedener Qualität, und zwar weicht der 1/6-Mittelwert 1,0001848 (bzw. 4,24646) vom Gesamt-Mittelwert 1,00101802 (bzw. 4,2463266) doppelt so stark ab wie der 2/5-Mittelwert 1,0001779 (bzw. 4,24626).

Da die zwei zusammengehörigen Folgen eines Permutationspaares dadurch ausgezeichnet sind, daß an jeder Stelle, an der in der einen Folge ein r_1 -Wert (z.B. 3%) steht, bei der anderen ein r_2 -Wert (z.B. 5%) stehen muß, enden die Folgen eines solchen Paares stets mit verschiedenen r_1 -Werten ($i=1,2$), d.h. die dem Permutationspaar zugehörigen $c^{(n)}$ -Werte, die mit $c^{(n)}$ und $\bar{c}^{(n)}$ bezeichnet werden mögen, haben in der Entwicklung von

$$c^{(n)} = 1 + (1+r_n) + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots$$

das in den Zinsfaktoren $(1+r_i)$ ($i=1,2$) lineare Glied $(1+r_1)$ bzw. $(1+r_2)$. Die lineare Komponente des arithmetischen (Teil-)Mittelwertes eines jeden Permutationspaares muß also stets den gleichen Wert

$$1 + \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (\text{bei } r_1=3\%, r_2 = 5\%, \text{ also } 1,04)$$

haben.

Bei alternierenden Folgen muß das vorletzte Glied derjenigen Zinssatzfolge, die mit r_2 endet, deren $c^{(n)}$ -Entwicklung also das zweite (lineare) Glied $(1+r_2)$ enthält, r_1 sein.

Bei diesen Folgen tritt also beim dritten Glied der obigen $c^{(n)}$ -Entwicklung, nämlich $(1+r_n)(1+r_{n-1})$, das Produkt $(1+r_1)(1+r_2)$ (im obigen Beispiel also $1,03 \cdot 1,05 = 1,0815$) auf.

Die andere ("Gegen"-)Folge des Permutationspaares muß - falls die eine Folge mit $(\dots r_1 r_2)$ endet - mit $(\dots r_2, r_1)$ enden, so daß auch hier das 3. Glied (das in den Zinsfaktoren vom 2. Grade ist) das gleiche Produkt $(1+r_2)(1+r_1) = 1,05 \cdot 1,03 = 1,0815$ liefert und somit auch den gleichen Mittelwert.

Sind die Folgen des betrachteten Permutationspaares nicht alternierend und endet (z.B. bei den monoton steigenden Folgen) die erste Folge auf $(\dots r_2, r_2)$, die zweite also

auf (... r_1, r_1), so muß die

$c^{(n)}$ -Entwicklung mit $1 + (1+r_2) + (1+r_2)^2 \dots$, die

$\bar{c}^{(n)}$ -Entwicklung mit $1 + (1+r_1) + (1+r_1)^2$ beginnen.

Der arithmetische $c^{(n)}$ -Mittelwert $(c^{(n)} + \bar{c}^{(n)}) : 2$ der alternierenden Folgen beginnt also mit

$1 + (1 + \frac{r_1+r_2}{2}) + (1+r_1)(1+r_2) \dots$ (im obigen Beispiel

also $1 + 1,04 + 1,0815 \dots$). Im Gegensatz dazu beginnt

der arithmetische $c^{(n)}$ -Mittelwert der mit zwei gleichen Zinssätzen endenden Folgen eines zusammengehörigen Folgenpaares, z.B. der monotonen Folge, mit

$$1 + (1 + \frac{r_1+r_2}{2}) + (\frac{(1+r_1)^2 + (1+r_2)^2}{2}) \dots$$

Da aber die Summe $a^2 + b^2$ stets größer als $2ab$ ist (denn $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ ist als Quadratzahl größer als 0), so muß auch der Mittelwert der alternierend en-

den Folgen stets kleiner als der Mittelwert der nicht alternierend endenden Folgen sein. Daß sich für

$c_{3/4}^{(4)}$ der gleiche arithmetische $c^{(n)}$ -Mittelwert wie

für $c_{2/5}^{(4)}$ ergibt, liegt daran, daß die steigend alter-

nierende Folge Nr. 1 (3,5,3,5) - abgesehen von der Reihenfolge - mit dem gleichen Zahlentrippl endet wie die nur auf den beiden letzten Stellen alternierende Folge Nr. 4, nämlich (3,5,5,3).

Der zum Permutationspaar (3/4) gehörige arithmetische

Mittelwert $c_{3/4}^{(4)}$ zeigt also genau die gleiche Entwicklung

$1 + (\frac{1,03+1,05}{2}) + 1,03 \cdot 1,05 + 1,03 \cdot 1,05 \cdot (\frac{1,03+1,05}{2})$ wie das Permutationspaar (2/5).

Dagegen ergibt sich für das (monotone) Permutationspaar (1/6) die $c^{(4)}$ -Entwicklung

$$1 + \frac{1,03+1,05}{2} + \frac{1,03^2+1,05^2}{2} + 1,03 \cdot 1,05 \left(\frac{1,03+1,05}{2} \right),$$

die zwar auch das gleiche 4. Glied $1,03 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,03+1,05}{2}$

wie der arithmetische Mittelwert der beiden anderen Permutationspaare aufweist, da bei nur je zwei Zinssätzen 3% bzw. 5% jedes Zinssatztrippel natürlich einen Zinssatz der einen und zwei Zinssätze der anderen Gruppe enthalten muß. Aber die drei Permutationspaare unterscheiden sich - wie gesagt- im Glied zweiten Grades in den Zinsfaktoren, nämlich $\frac{1,03^2+1,05^2}{2} = 1,0817$ bzw. $1,03 \cdot 1,05 = 1,0815$ voneinander.

Tatsächlich sind $c_{1/6}^{(4)} = 4,24646$ und $c_{2/5}^{(4)} = c_{3/4}^{(4)} = 4,24626$

genau um $1,0817 - 1,0815 = 0,0002$ voneinander verschieden.

Bei sechs Zinssätzen, die aus je drei Zinssätzen der gleichen Art bestehen, z.B. 3 Zinssätzen von 3% und 3 Zinssätzen von 5%, ergeben sich insgesamt $\binom{6}{3} = 20$ verschiedene

Anordnungsmöglichkeiten der Zinssätze innerhalb der einzelnen Zinssatzfolgen, deren Numerierung nach dem Absolutbetrag erfolgen soll. Man kann daraus 10 Permutationspaare bilden, und zwar so, daß $c_1^{(6)}$ und $c_{20}^{(6)}$,

$c_2^{(6)}$ und $c_{19}^{(6)}$, $c_3^{(6)}$ und $c_{18}^{(6)}$ usw., schließlich

$c_{10}^{(6)}$ und $c_{11}^{(6)}$ je ein zusammengehöriges Permutationspaar abgeben. Für das monotone Permutationspaar $c_1^{(6)}$ und $c_{20}^{(6)}$

ergibt sich der größte arithmetische Mittelwert, nämlich

$$c_{1,20}^{(6)} = (6,730603 + 6,5357218) : 2 = 6,633162, \text{ wo}$$

$$c_1^{(6)} = \frac{1,05^3 - 1}{0,05} + 1,05^3 \frac{1,03^3 - 1}{0,03}$$

und

$$c_{20}^{(6)} = \frac{1,03^3 - 1}{0,03} + 1,03^3 \frac{1,05^3 - 1}{0,05}$$

ist.

Tabelle III-2-1

Nr.	Anordnung der Zinss.- Folge	$c_j^{(6)}$ (j=1...20)	Arithmetische Mittelwerte der Permuta- tionspaare
1	3,3,3,5,5,5	$c_1^{(6)} = 6,730603$	
2	3,3,5,3,5,5	$c_2^{(6)} = 6,708553$	
3	3,3,5,5,3,5	$c_3^{(6)} = 6,687553$	
4	3,5,3,3,5,5	$c_4^{(6)} = 6,6858415$	
5	3,3,5,5,5,3	$c_5^{(6)} = 6,667552$	
6	3,5,3,5,3,5	$c_6^{(6)} = 6,6648392$	$c_{1/20}^{(6)} = 6,6331620$
7	5,3,3,3,5,5	$c_7^{(6)} = 6,6624483$	$c_{2/19}^{(6)} = 6,6327460$
8	3,5,3,5,5,3	$c_8^{(6)} = 6,6448415$	$c_{3/18}^{(6)} = 6,632546$
9	3,5,5,3,3,5	$c_9^{(6)} = 6,6432115$	$c_{4/17}^{(6)} = 6,6325300$
10	5,3,3,5,3,5	$c_{10}^{(6)} = 6,6414486$	$c_{5/16}^{(6)} = 6,6325455$
11	3,5,5,3,5,3	$c_{11}^{(6)} = 6,6232115$	$c_{6/15}^{(6)} = 6,6323275$
12	5,3,3,5,5,3	$c_{12}^{(6)} = 6,6214486$	$c_{7/14}^{(6)} = 6,632529$
13	5,3,5,3,3,5	$c_{13}^{(6)} = 6,6198186$	$c_{8/13}^{(6)} = 6,6323300$
14	3,5,5,5,3,3	$c_{14}^{(6)} = 6,6026104$	$c_{9/12}^{(6)} = 6,6323300$
15	5,3,5,3,5,3	$c_{15}^{(6)} = 6,5998164$	$c_{10/11}^{(6)} = 6,6323300$
16	5,5,3,3,3,5	$c_{16}^{(6)} = 6,5975394$	
17	5,3,5,5,3,3	$c_{17}^{(6)} = 6,5792186$	$c_a^{(6)} = 0,6325376$
18	5,5,3,3,5,3	$c_{18}^{(6)} = 6,5775397$	
19	5,5,3,5,3,3	$c_{19}^{(6)} = 6,5569397$	
20	5,5,5,3,3,3	$c_{20}^{(6)} = 6,5357218$	

Zum alternierenden Permutationspaar (6/15) gehört - wie gesagt - der absolut kleinste arithmetische Mittelwert, nämlich

$$c_{6,15}^{(6)} = \frac{1,0815^3 - 1}{0,0815} \cdot 2,04 = 6,6323275.$$

Der arithmetische Gesamtmittelwert der $c^{(n)}$ -Werte muß aber zwischen 6,6323275 und 6,633162 liegen. Wie man sieht, liegt der Betrag von $c_a^{(6)} = 6,6325376$ aber näher an $c_{6,15}^{(6)}$, also am arithmetischen Mittelwert des alternierenden Permutationspaares, als an $c_{1,20}^{(6)}$, dem arithmetischen Mittelwert, der zum monotonen Permutationspaar gehört.

Der zu $c_a^{(6)}$ nach der Gleichung zugehörige (indirekte) mittlere Kurswert ist

$$r_{o\ p\ o a}^{(6)} = \frac{1 + r_o \cdot 6,6325376}{1,03^3 \cdot 1,05^3},$$

was für einen angenommenen Couponsatz von $r_o = 4\%$ einen mittleren Kurs von 1,0002636 ergibt.

Der mittlere Effektivzinssatz (allgemein)

Um den Effektivzinssatz von der speziellen Folge der Einperiodenterminzinssätze unabhängig zu machen, kann man auch hier - wie bei den Kursen einen "mittleren (arithmetischen oder geometrischen oder harmonischen) Effektivzinssatz" einführen, wobei je nach Bestimmungsmethode der Mittelwert noch zwischen "direkt", (d.h. unmittelbar aus allen möglichen Effektivzinssätzen, die zur gleichen Zinssatzgruppe gehören) bzw. "indirekt" (d.h. mittelbar über zuvor bezeichnete Mittelwerte von Zwischenvariablen) bestimmten Mittelwerten zu unterscheiden ist. Die dabei verwendeten Bezeichnungen r_{ea} , r_{eg} (r_{egM}); r_{eh} (r_{ehM})¹⁾ beziehen sich - wenn sie ohne Zusatz (Stern) verwendet werden - stets auf den direkt, d.h. unmittelbar aus sämtlichen Effektivzinssätzen $r_{ej}^{(n)}$ (wo j von 1 bis $n!$ läuft, falls die Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge voneinander verschieden sind) durch (arithm., geometr., harm.) Mittelung bestimmten, Mittelwert.

Wie schon in den Abschnitten II,5 und II,6²⁾ bemerkt, stellt der langfristige Zinssatz der klassischen Erwartungstheorie $R^{(n)}$, also - bei Benutzung der Bezeichnungsweise des Abschnittes über "Arten der Mittelwertbildung"³⁾ - der "indirekte geometrische" Mittelwert (r_g) der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge, eine gute Näherung für den "mittleren", d.h. direkt arithmetisch gemittelten Effektivzinssatz r_{ea} dar, der ja wie r_g von der Reihenfolge der Einperiodenterminzinssätze der gegebenen Zinssatzfolge unabhängig ist.

Wieder stellt sich die Frage, ob sich das Verfahren der Berechnung des mittleren Effektivzinssatzes - ähnlich wie bei den Kursen - durch "Vorverlegung" der Mittelwertbildung vereinfachen läßt, wenn man unter Vorverlegung die Methode versteht, nicht die Effektivzinssätze einzeln zu bestimmen und diese dann arithmetisch (geometr. bzw. harm.)

1) Die unteren Indizes a , g , gM , h und hM beziehen sich auf die Art der Mittelung der Effektivzinssätze $r_{ej}^{(n)}$ ($j=1, \dots, n!$) bei der direkten (unmittelbaren) Bestimmungsmethode in Übereinstimmung mit den Festsetzungen in Abschnitt III,1

2) Vgl. S.93 Abschnitt II,5 bzw. S.103 Abschnitt II,6

zu mitteln, sondern den mittleren Effektivzinssatz "angenhähert" mit Hilfe des zuvor bestimmten mittleren, d.h. arithmetisch (geometrisch bzw. harmonisch) gemittelten Kurses, zu berechnen, eine Methode, die eine wesentliche Vereinfachung des Rechenverfahrens und Verringerung des Rechenaufwandes bedeutet. Diese Bestimmungsmethode wird daher als "vereinfachtes Rechenverfahren" bezeichnet.

Man wird allerdings, da zwischen Effektivzinssatz und Kurs keine lineare Abhängigkeit besteht, hier nicht erwarten können, daß die indirekte (mittelbare) Bestimmungsmethode des Effektivzinssatzes über den mittleren Kurs oder - was praktisch dasselbe ist - über den mittleren $c^{(n)}$ -Wert zum genau gleichen Ergebnis führt wie die direkten (unmittelbare) Methode ohne Benutzung des vereinfachten Rechenverfahrens. Die Gleichwertigkeit beider Verfahren bei den Kursen beruhte nämlich ausschließlich auf der linearen Abhängigkeit der Kurswerte $p_{oj}^{(n)}$ von den $c_j^{(n)}$ -Werten, wo j von 1 bis $n!$ läuft, wenn alle Einperiodenterminzinssätze der gegebenen Zinssatzfolge voneinander verschieden sind.

Durch die Verwendung des arithmetisch (geometrisch bzw. harmonisch) gemittelten $c^{(n)}$ -Wertes $c_a^{(n)}$ ($c_{gM}^{(n)}$ bzw. $c_{hM}^{(n)}$) anstelle des mittleren Kurses $p_{oa}^{(n)}$ ($p_{ogM}^{(n)}$ bzw. $p_{ohM}^{(n)}$)¹⁾ läßt sich die Bestimmung des Effektivzinssatzes r_e nach der indirekten (also mittelbaren Methode) zusätzlich vereinfachen, ohne daß dabei eine weitere Ungenauigkeit im Ergebnis in Kauf genommen werden muß.

Effektivzinssätze, die nach der mittelbaren Methode, also

3) Vgl. S. 115 ff.

1) Die indirekten Mittelwerte, die durch die Indizes g und h ohne Hinzufügung von M bezeichnet werden (gemäß Abschnitt III,1) haben nur für die Zinssätze r_i oder r_e , bei denen die Addition der Einheit zu den i entsprechenden Zinsfaktoren führt, Bedeutung.

nach dem vereinfachten Rechenverfahren bestimmt worden sind, werden im Unterschied zu den ohne Vereinfachung des Rechenverfahrens also direkt bestimmten arithmetischen Mittelwerten für den Effektivzinssatz, mit einem Stern gekennzeichnet.

Um den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Arten der Mittelwertbildung (arithmet., geometr., harmon.) für die c_j -Werte ($j=1, \dots, n!$) bei der unmittelbaren (direkten) und mittelbaren (indirekten, also vereinfachten) Berechnungsmethode für die Effektivzinssätze besser übersehen zu können, geht man zweckmäßig auch hier von dem besonders einfachen und bereits häufig benutzten Beispiel einer Zinssatzfolge von nur zwei Einperiodenterminzinssätzen ($r_1 = 3\%$, $r_2 = 5\%$) aus mit dem der Zinssatzfolge (3/5) zugeordneten $c^{(2)}$ -Wert $c_1^{(2)} = 2,05$ und dem der Zinssatzfolge (5/3) zugeordneten $c^{(2)}$ -Wert $c_2^{(2)} = 2,03$.

Da sich bei der Erörterung der Tab. II-6-3 bereits gezeigt hat, daß es für die Berechnung der arithmetisch gemittelten Effektivzinssätze nach der indirekten Bestimmungsmethode günstiger ist, vom harmonischen statt vom arithmetischen Mittel der $c_j^{(n)}$ -Werte ($j=1, \dots, n!$) auszugehen, wird neben dem arithmetische Mittel

$c_a^{(2)} = 2,04$ und dem (direkten) geometrischen Mittel $\sqrt{2,03 \cdot 2,05} = 2,0399754$ auch das (direkte) harmonische Mittel $c_{hM}^{(2)} = 2,0399509$, das der Gleichung

$$\frac{1}{2,03} + \frac{1}{2,05} = \frac{2}{c_{hM}}$$

genügt, zur Berechnung der angenäherten mittleren Effektivzinssätze $r_{ea}^{(2)*}$, $r_{egM}^{(2)*}$, $r_{ehM}^{(2)*}$ herangezogen.

Aus den $2(=2!)$ verschiedenen Einzel-Effektivzinssätzen

${}_4r_{el}^{(2)} = 0,039755$ und ${}_4r_{e2}^{(2)} = 0,0401471$ ergibt sich für den direkt gemittelten (arithmet.) Effektivzinssatz ${}_4r_{ea}^{(2)}$ der Wert $0,0399511$.¹⁾

Für ${}_4r_{egM}^{(2)}$; ${}_4r_{eg}^{(2)}$; ${}_4r_{ehM}^{(2)}$ und ${}_4r_{eh}^{(2)}$ würde man der Reihe nach erhalten: $0,0399505$; $0,0399510$; $0,0399500$; $0,0399510$. Man sieht, daß die direkten Mittelwerte²⁾ erstens - wenn man sie nach ihrem Absolutbetrag ordnet - in der Reihenfolge r_a , r_g , r_h bzw. $r_{aM}(=r_a)$, r_{gM} , r_{hM} aufeinander folgen und daß zweitens - wie schon gesagt - die Schwankung bei den direkten Mittelwerten ${}_4r_{eaM}^{(2)} = 0,0399511$, ${}_4r_{egM}^{(2)} = 0,0399505$, ${}_4r_{hM}^{(2)} = 0,0399506$ wesentlich größer ist als die Schwankung bei den indirekten Mittelwerten ${}_4r_{ea}^{(2)} = 0,0399511$, ${}_4r_{eg}^{(2)} = 0,0399510$, ${}_4r_{eh}^{(2)} = 0,0399510$, die nahezu identisch sind.

Benutzt man bei der indirekten (mittelbaren) Bestimmungsmethode den arithmetischen Mittelwert $c_a^{(2)} = 2,04$ (wozu der Kurs ${}_4p_{oa}^{(2)} = 1,0000924$ gehört), so findet man für den angenäherten (arithmetisch bestimmten) Mittelwert des Effektivzinssatzes ${}_4r_{ea}^{(2)*}$ den Zahlenwert $0,039951$, während bei Benutzung des (direkten) harmonischen Mittelwertes $c_{hM}^{(2)} = 2,0399509$ sich für den angenäherten (harmonisch bestimmten) Mittelwert des Effektivzinssatzes ${}_4r_{ehM}^{(2)*}$ der Wert $0,039952$ und bei der Verwendung des (direkten) geometrischen Mittelwertes ($c_{gM}^{(2)} = 2,0399754$) der angenäherten geometrisch bestimmte Mittelwert des Effektivzinssatzes ${}_4r_{egM}^{(2)*} = 0,0399514$ ergibt.

1) Vgl. Abschnitt II, 6, S.100

2) Vgl. Abschnitt III,1, S. 116 ff.

Alle drei nach der mittelbaren Bestimmungsmethode (vereinfachtes Rechenverfahren) erhaltenen Effektivzinssätze $4^{r_{ea}^{(2)*}}$, $4^{r_{egM}^{(2)*}}$ und $4^{r_{ehM}^{(2)*}}$ sind miteinander und mit dem bei der direkten (unmittelbaren) Bestimmungsmethode errechneten Mittelwert $4^{r_{ea}^{(2)}} = 0,0399511$ des Effektivzinssatzes nahezu identisch. Allerdings kehrt sich insofern die Ordnung - arithmetisch, geometrisch, harmonisch - um, als zum höheren $c^{(n)}$ -Wert und damit höheren Kurs der kleinere Effektivzinssatz gehört. Den $c_i^{(n)}$ -Mittelwerten $c_a^{(2)} = 2,04$; $c_{gM}^{(2)} = 2,0399754$; $c_{hM}^{(2)} = 2,0399509$ entsprechen (mit einem leichten Gefälle) die Effektivzinssätze $4^{r_{ehM}^{(2)*}} = 0,0399520$; $4^{r_{egM}^{(2)*}} = 0,0399514$; $4^{r_{ea}^{(2)*}} = 0,0399510$

Darüberhinaus erscheint die Feststellung wichtig, daß der (harmonisch bestimmte) indirekt gemittelte Effektivzinssatz $4^{r_{ehM}^{(2)*}} = 0,0399520$ dem indirekten geometrischen Mittelwert aus den Einperiodenterminzinssätzen der gegebenen Zinssatzfolge (3/5), nämlich $\sqrt{1,03,1,05} - 1 = 0,0399519$ (dem langfristigen Zinssatz der klassischen Erwartungstheorie), am nächsten kommt.

Geht man nun zu einer Laufzeit von mehr als zwei (also drei und mehr) Zinsperioden über und benutzt im Falle $n=3$ das Beispiel von Lutz mit den $c_j^{(3)}$ -Werten ($j=1...6$)

3,2248	3,1840
3,2140	3,1730
3,2048	3,1630 ,

so kann man aus der Tab. III-3-1¹⁾ die Effektivzinssätze $r_{ej}^{(3)}$ ($j=1...6$) entnehmen, die zu den 3! verschiedenen Permutationen der Zinssatzfolge (5/6/8) gehören.

Die nach der direkten Bestimmungsmethode berechneten mittleren (arithmet., geometr., harmon.) Effektivzinssätze

1) Die Tabelle II-6-2 enthält nur die "charakteristischen" Effektivzinssätze und nicht die zum r_o -Wert 5% gehörigen Effektivzinssätze.

Tabelle III-3-1

1	2	3a	3b	4a	4b
j	$c_j^{(3)}$	$5^P(3)$ 5^Oj	nach der indi- rekten (mittel- baren) Bestimmungs- methode errechnete Kurs-Mittelwerte	$5^R(3)$ 5^Ej	nach der indi- rekten (mittel- baren) Bestimmungs- methode errechnete Mittelwerte von Effektivzinssätzen
1	3,2248	0,9660577		0,0627631	
2	3,2140	0,9656084		0,0629362	
3	3,2048	0,9652257		0,0630837	
4	3,1840	0,9643605		0,0634175	
5	3,1730	0,9639030		0,0635941	
6	3,1630	0,9623870		0,0637548	
Mittelwerte a) arithm. b1) geom. direkt c1) harm. direkt					
a	3,19393	$P_{Oa} = 0,9645904$	b1) geom. direkt	(3) $r_{ea} = 0,0632582$	$r_{ea}^* = 0,0632530$
b1	3,193856	$P_{Og} = 0,9645897$	b2) " indirekt	$r_{gm} = 0,0632572$	$r_{gm}^* = 0,0632592$
b2	(3,193874)	---		$r_{eg} = 0,0632582$	---
c1	3,193779	$P_{Oh} = 0,9645883$		$r_{ehm} = 0,0632562$	$r_{ehm}^* = 0,0632604$
c2	(3,1938163)	---		$r_{eh} = 0,0632582$	

$5r_{ea}^{(3)}$; $5r_{egM}^{(3)}$; $5r_{eg}^{(3)}$; $5r_{ehM}^{(3)}$ und $5r_{eh}^{(3)}$ sind in Spalte 4a der Tab. III-3-1 ¹⁾ zusammengestellt worden.

Die nach der indirekten Bestimmungsmethode, d.h. bei Benutzung der 3 (direkten) $c^{(3)}$ -Mittelwerte

$$c_a^{(3)} = 3,1939\bar{3}, \quad c_{gM}^{(3)} = 3,193856 \quad \text{und} \quad c_{hM}^{(3)} = 3,193779$$

sich ergebenden mittleren Effektivzinssätze

$5r_{ea}^{(3)*}$, $5r_{egM}^{(3)*}$ und $5r_{ehM}^{(3)*}$ findet man in Spalte 4b) der gleichen Tabelle.

Es zeigt sich, daß - wie beim Beispiel mit nur zwei Einperiodenterminzinssätzen - die indirekten Mittelwerte der nach der direkten (unmittelbaren) Bestimmungsmethode errechneten Effektivzinssätze

$$5r_{eaM}^{(3)} = 0,0632582; \quad 5r_{egM}^{(3)} = 0,0632582 \quad \text{und} \quad 5r_{ehM}^{(3)} = 0,0632582$$

völlig übereinstimmen, während die mittleren Effektivzinssätze $5r_{ea}^{(3)} = 0,0632582$; $5r_{eg}^{(3)} = 0,0632572$ und $5r_{eh}^{(3)} = 0,0632562$

dem Absolutbetrag nach vom arithmetischen zum harmonischen Mittelwert langsam abfallen.

Bei den nach der indirekten Methode bestimmten mittleren Effektivzinssätzen ist umgekehrt der $r_{ehM}^{(3)*}$ -Wert

$$5r_{ehM}^{(3)*} = 0,0632604 \quad \text{der größte (er ist außerdem mit dem}$$

indirekten geometrischen Mittelwert der Zinssätze der

$$\text{gegebenen Zinssatzfolge } r_g = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} - 1 = 0,0632604$$

identisch) und der $r_{ea}^{(3)*}$ -Wert $5r_{ea}^{(3)*} = 0,0632580$ der

kleinste, wobei der letztere fast völlig mit dem

$5r_{ea}^{(3)}$ -Wert übereinstimmt.

Mit Rücksicht auf den zuletzt angesprochenen Sachverhalt läßt sich also verallgemeinernd sagen, daß der nach der indirekten Methode bestimmte mittlere (arithm.) Effektivzinssatz $r_{ea}^{(n)*}$ eine gute (bzw. sehr gute) Näherung für

1) im unteren Teil der Tabelle

den "richtigen" (d.h. den ohne Vereinfachung der Rechnung direkt bestimmten) mittleren (arithm.) Effektivzinssatz $r_{ea}^{(n)}$ ist und daß andererseits der indirekt unter Verwendung des direkten harmonischen Mittels $c_{nM}^{(n)}$ bestimmte Effektivzinssatz $r_{ehM}^{(n)*}$ eine sehr gute Näherung für den indirekten geometrischen Mittelwert r_g der Einperiodenterminzinssätze der gegebenen Zinssatzfolge - dem langfristigen Zinssatz der klassischen Erwartungstheorie - darstellt.

In dem Maße, in dem der arithmetische Mittelwert der Effektivzinssätze $r_{ea}^{(n)}$ mit dem angenäherten (harmonisch bestimmten) Effektivzinssatz $r_{ehM}^{(n)*}$ übereinstimmt, kann der erstere bzw. sein arithmetischer Näherungswert $r_{eaM}^{(n)*}$ auch als Näherungswert für den langfristigen Zinssatz $R^{(n)} (= r_g)$ der klassischen Erwartungstheorie betrachtet werden.

Natürlich hängen sowohl die Mittelwerte der Kurse als auch die Mittelwerte der Effektivzinssätze (für einen bestimmten r_0 -Wert) von der Höhe des Couponsatzes ab, da die Abhängigkeit der Einzelkurse (die zu den verschiedenen Permutationen der Einperiodenterminzinssätze der gegebenen Zinssatzfolge gehören) bei den verschiedenen Arten der Mittelung ebensowenig aufgehoben wird wie die Abhängigkeit der verschiedenen Effektivzinssätze vom r_0 -Wert. Diese Abhängigkeit verschwindet nur bei den couponfreien Wertpapieren, da bei ihnen der Faktor r_0 der verschiedenen c -Werte in der Gleichung

$$\frac{1 + r_0 \cdot c_j^{(n)}}{\prod (n)} \quad (j=1, \dots, n!)$$

des Kurses $r_0 p_{oj}^{(n)}$ gleich 0 wird, so daß nur das von j unabhängige Glied $p_o^{(n)} = \frac{1}{\prod (n)}$ stehenbleibt.

Da der Kurs für $r_0 = 0$ unabhängig von der sukzessiven

Anordnung der gegebenen Einperiodenterminzinssätze r_i ($i=1, \dots, n$) den konstanten Wert

$${}_0^p{}_0^{(n)} = \frac{1}{\prod(n)},$$

bei der Zinssatzfolge (3/5) den Wert ${}_0^p{}_0^{(2)} = \frac{1}{1,0815}$,

bei (5/6/8) den Wert ${}_0^p{}_0^{(3)} = \frac{1}{1,20205}$ annimmt und somit auch der zugehörige Effektivzinssatz

$${}_0^r{}_e^{(n)} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)} - 1$$

von der speziellen Reihenfolge der Zinssätze r_i ($i=1, \dots, n$) unabhängig ist, stimmen in diesem Fall unmittelbar (oder direkt) und mittelbar (oder indirekt) bestimmter Mittelwert miteinander und mit dem genannten r_e -Wert ${}_0^r{}_e^{(n)} = r_g (= R^{(n)})$ -Wert der klassischen Erwartungstheorie) überein.

Den Einfluß des Couponsatzes auf den mittelbar oder unmittelbar bestimmten (arithmetischen) Mittelwert bei couponversehenen Wertpapieren, also bei $r_o \neq 0$, macht man sich für die Laufzeit $n=2$ bzw. $n=3$ am besten wieder an den beiden obigen Beispielen mit der Zinssatzfolge (3/5), Couponsatz 4%, bzw. (5/6/8), Couponsatz 5%, klar. Die entsprechenden Einzelwerte für Kurs und Effektivzinssatz sowie für die beiden arithmetisch (direkt bzw. indirekt) bestimmten Mittelwerte des Effektivzinssatzes sind (im Beispiel 1)

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_4^p{}_{01}^{(2)} = 1,0004623 \quad ({}_4^r{}_{01}^{(2)} = 0,039755) \\ {}_4^p{}_{02}^{(2)} = 0,9997226 \quad ({}_4^r{}_{02}^{(2)} = 0,0401471) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} {}_4^r{}_{ea}^{(2)} = 0,0399511 \\ {}_4^r{}_{ea}^{(2)*} = 0,0399510. \end{array}$$

Vergrößert man den Betrag des Couponsatzes r_o von 4% auf 10%, so erhält man für $10^p{}_{oj}^{(2)}$ ($j=1,2$) und $10^r{}_{oj}^{(2)}$ ($j=1,2$) sowie für $10^r{}_{ea}^{(2)}$ bzw. $10^r{}_{ea}^{(2)*}$ die Werte

$$\left\{ \begin{array}{l} 10P_{01}^{(2)} = 1,1141932 \quad (10r_{01}^{(2)} = 0,039486) \\ 10P_{02}^{(2)} = 1,1123439 \quad (10r_{02}^{(2)} = 0,04040135) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 10r_{ea}^{(2)} = 0,03995001 \\ 10r_{ea}^{(2)*} = 0,0399497 \end{array} \right.$$

Ein Couponsatz von $r_o = 100\%$ würde die Effektivzinssätze

$$100r_{el}^{(2)} = 0,0378839 \quad \text{bzw.} \quad 100r_{e2}^{(2)} = 0,0420110 \quad \text{und damit}$$

den direkt gemittelten arithmetischen Mittelwert

$$100r_{ea}^{(2)} = 0,03994751 \quad \text{lieferten, während der indirekt ge-}$$

$$\text{mittelte (über } c_{1,2}^{(2)} = \frac{2,03+2,05}{2} = 2,04 \text{ bestimmte) arith-}$$

$$\text{metische Mittelwert } 100r_{ea}^{(2)*} = 0,0399418 \text{ ist. Vergleicht}$$

$$\text{man die Differenzen } r_o r_{ea}^{(2)} - r_o r_{ea}^{(2)*} \text{ für } r_o = 0\%, 4\%, 10\%$$

und 100%, also

$$0r_{ea}^{(2)} - 0r_{ea}^{(2)*} = 0,0399519 - 0,0399519 = 0$$

$$4r_{ea}^{(2)} - 4r_{ea}^{(2)*} = 0,0399511 - 0,0399510 = 1 \cdot 10^{-7}$$

$$10r_{ea}^{(2)} - 10r_{ea}^{(2)*} = 0,0399500 - 0,0399497 = 3 \cdot 10^{-7}$$

$$100r_{ea}^{(2)} - 100r_{ea}^{(2)*} = 0,0399475 - 0,0399418 = 67 \cdot 10^{-7},$$

miteinander, so stellt man fest, daß diese Differenz mit wachsendem r_o zunimmt.

Für $r_o = \infty$ findet man ¹⁾ die (Einzel-)Effektivzinssätze

$$\infty r_{el}^{(2)} = 0,036529 \quad \text{bzw.} \quad \infty r_{e2}^{(2)} = 0,043371, \text{ also den direkt}$$

$$\text{bestimmten (arithm.) Mittelwert } \infty r_{ea}^{(2)} = 0,0399500,$$

während sich für den nach der Formel

$$\frac{(1 + \infty r_e^*)^3 - 1}{r_e^* (1 + r_e^*)^3} = \frac{c_{1,2}^{(3)}}{\Pi(3)} = \frac{2,04}{1,0815}$$

errechneten, also indirekt bestimmten (arithm. gemittelten) Effektivzinssatz $\infty r_{ea}^{(2)*}$ der Wert 0,0399353 er-

1) S. den nächsten Abschnitt III,4, S. 153 ff.

gibt, was eine $\infty r_{ea}^{(2)} - \infty r_{ea}^{(2)*}$ -Differenz von $147 \cdot 10^{-7}$ liefert; die Differenz $r_o r_{ea}^{(2)} - r_{ea}^{(2)*}$ bleibt also auch beim Grenzübergang $r_o \rightarrow \infty$ beschränkt.

Bei $n=3$ erhält man im 2. Beispiel¹⁾ die Effektivzinssätze und ihre nach der direkten bzw. indirekten Methode bestimmten arithmetischen Mittelwerte (für $r_o=5\%$) aus der Tabelle III-3-1

$5r_{ea}^{(3)} = 0,0632582$ und $5r_{ea}^{(3)*} = 0,0632580$ mit der Differenz $5r_{ea}^{(3)} - 5r_{ea}^{(3)*} = 2 \cdot 10^{-7}$. (Für $r_o=0$ ist natürlich wegen $o r_{ea}^{(3)} = o r_{ea}^{(3)*} = r_g \sqrt{1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,08} - 1 = 0,0632604$ die Mittelwertdifferenz wieder gleich 0).

Für $r_o = 10\%$ (Verdoppelung des ursprünglichen Couponsatzes $r_o = 5\%$) erhält man (bei der j-Nummerierung der Tabelle III-3-1) $10r_{e1}^{(3)} = 0,0623523$; $10r_{e2}^{(3)} = 0,0626681$; $10r_{e3}^{(3)} = 0,0629375$; $10r_{e4}^{(3)} = 0,0635473$; $10r_{e5}^{(3)} = 0,0638705$ und $10r_{e6}^{(3)} = 0,0641646$, d.h. der nach der direkten Methode bestimmte arithmetische Mittelwert ist $10r_{ea}^{(3)} = 0,0632567$, während der zum mittleren (arithm.) $c^{(n)}$ -Wert $c_{ea}^{(3)} = 3,1939\bar{3}$ gehörige nach der indirekten (mittelbaren) Methode bestimmte arithmetische Mittelwert des Effektivzinssatzes r_e den Zahlenwert $10r_{ea}^{(3)*} = 0,0632559$ besitzt.

Für $r_o = 10\%$ ergibt sich also eine Mittelwertdifferenz von $10r_{ea}^{(3)} - 10r_{ea}^{(3)*} = 8 \cdot 10^{-7}$, wodurch die Schlußfolgerung, die sich aus den Zahlenwerten des 1. Beispiels ergab, bestätigt wird.

1) Beispiel von Lutz mit der Zinssatzfolge 5/6/8 und veränderlichem Couponsatz r_o

4. Die Mittelwerte bei den "charakteristischen"
Effektivzinssätzen

Bevor man versucht, das Verfahren der vereinfachten Mittelwertbestimmung sinngemäß auf die charakteristischen Effektivzinssätze, nämlich die angepaßten Effektivzinssätze r_{eo} bzw. den Endeffektivzinssatz ${}_{\infty}r_e$, zu übertragen, erscheint es wichtig, noch einmal den wesentlichen Unterschied dieser beiden Effektivzinssätze hinsichtlich ihrer Abhängigkeit vom Couponsatz herauszustellen. Der angepaßte Effektivzinssatz hängt insofern nicht vom Couponsatz ab, als im Anpassungsfall der Couponsatz durch den angepaßten Effektivzinssatz mitbestimmt ist und umgekehrt. Daraus folgt, daß beim Übergang von einer Permutation der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge zu einer anderen, beide Zinssätze in Abhängigkeit vom betreffenden $c^{(n)}$ -Wert sich ändern müssen, um den Kurs pari zu stellen.

Andererseits ergibt sich aus der Definition des Endeffektivzinssatzes als "Grenz"-Effektivzinssatz für $r_o \rightarrow \infty$ die alleinige Abhängigkeit dieses Zinssatzes vom Verhältnis $\frac{c^{(n)}}{\prod(n)}$ (für $(j=1, \dots, n!)$, falls alle n gegebenen Zinssätze der Zinssatzfolge verschieden sind), da in der Bestimmungsgleichung für ${}_{\infty}r_e$, nämlich

$$\frac{1}{\prod(n)} + r_o \frac{c^{(n)}}{\prod(n)} = \frac{1}{(1+{}_{\infty}r_e)^n} + r_o \frac{(1+{}_{\infty}r_e)^n - 1}{{}_{\infty}r_e (1+{}_{\infty}r_e)^n}$$

bei sehr großen r_o -Werten die r_o -freien Glieder beider Seiten vernachlässigt werden können.

Gemeinsam ist für beide ¹⁾charakteristischen Effektivzinssätze ihre enge Beziehung zum Quotienten

$$\frac{c_j^{(n)}}{\prod(n)} \quad (j = 1, \dots, n!)$$

bzw. zu dessen Kehrwert, der für $n \rightarrow \infty$ unmittelbar den zugehörigen ${}_{\infty}r_e^{(n)}$ -Wert $({}_{\infty}r_e^{(\infty)})$ liefert, während

1) Der $(r_o=0)$ -Effektivzinssatz, bei alle Mittelwerte mit dem einen Effektivzinssatz zusammenfallen, wird fortgelassen.

$r_{eoj}^{(n)}$ ja durch $\frac{\Pi^{(n)} - 1}{c_j^{(n)}} \quad (j=1, \dots, n!)$ definiert ist.

Da der $\Pi^{(n)}$ -Wert unabhängig von der Anordnung der Einperiodenterminzinssätze einer gegebenen Zinssatzfolge $r_i \quad (i=1, \dots, n)$ ist, sind somit - wie bereits festgestellt wurde - die arithmetische Mittelung der angepaßten Effektivzinssätze $r_{eoj}^{(n)}$ und die harmonische Mittelung der zugehörigen $c_j^{(n)}$ -Werte $(j=1, \dots, n!)$ einander zuzuordnen.

Für $n=2$ sind im Falle des Beispiels 1 von Abschnitt III,3 die zu $c_1^{(3)} = 2,05$ bzw. $c_2^{(2)} = 2,03$ gehörenden charakteristischen Effektivzinssätze

$$r_{eol}^{(2)} = \frac{1,0815-1}{2,05} = 0,039756 \quad ({}_{oo}r_{el}^{(2)} = 0,036529) \quad \text{bzw.}$$

$$r_{eol}^{(2)} = \frac{1,0815-1}{2,03} = 0,0401477 \quad ({}_{oo}r_{e2}^{(2)} = 0,043371), \text{ deren}$$

arithmetische Mittelwerte bei der Anwendung der unmittelbaren Bestimmungsmethode (Addition der Einzelwerte und Division des Resultates durch 2) die Zahlenwerte $r_{eoa}^{(2)} = 0,0399518$ bzw. ${}_{oo}r_{ea}^{(2)} = 0,0399500$ haben.

Dagegen erhält man bei der mittelbaren Bestimmungsmethode, d.h. mit Hilfe des arithmetischen bzw. des (direkten) harmonischen $c_j^{(2)}$ -Mittelwertes $(j=1,2)$, nämlich

$$c_a^{(2)} = \frac{2,05+2,03}{2} = 2,04 \quad \text{bzw.} \quad c_{hm}^{(2)} = 2,0399509 \quad \text{für den angepaßten Effektivzinssatz}$$

$$r_{eo}^{(2)} \text{ den Wert } r_{eoa}^{(2)*} = 0,0399509 \text{ bzw. } r_{eohM}^{(2)*} = 0,0399519.$$

Der letztere Effektivzinssatz stimmt einerseits ganz genau mit dem r_g -Wert = (langfristiger Zinssatz des klassischen Erwartungstheorie $R^{(2)} = \sqrt[2]{1,03 \cdot 1,05} - 1$) überein und unterscheidet sich andererseits vom direkt, d.h. nach der unmittelbaren Methode bestimmten arithmetischen Mittelwert $r_{eoa}^{(2)} = 0,0399518$ so geringfügig (die Differenz liegt innerhalb der Rechengenauigkeit des benutzten Gerätes), daß man auch hier von einer nahezu völligen Übereinstimmung sprechen kann.

Für den indirekt bestimmten arithmetischen Mittelwert des Effektivzinssatzes für $r_o = \infty$ findet man unter Benutzung der gleichen $c_j^{(2)}$ -Mittelwerte ($j=1,2$)

$${}_{\infty}r_{ea}^{(2)*} = 0,0399353 \quad \text{bzw.} \quad {}_{\infty}r_{ehM}^{(2)*} = 0,0399519.$$

Man stellt fest, daß (ebenso wie bei den angepaßten Effektivzinssätzen) auch hier der Mittelwert (arithm.), den man bei Verwendung des $c_{hM}^{(2)}$ -Wertes erhält, sich dem durch die direkte Bestimmungsmethode errechneten arithmetischen Mittelwert des Effektivzinssatzes für $r_o = \infty$, nämlich ${}_{\infty}r_{ea}^{(2)} = 0,0399500$, wesentlich besser annähert als der mit Hilfe des $c_a^{(2)}$ -Wertes bei der indirekten Methode erhaltene ${}_{\infty}r_{ea}^{(2)*}$ -Wert.

Für $n=3$ ergeben sich im Fall des Beispiels 2, Abschn.III,3 (Beispiel von Lutz) für die sechs verschiedenen $c_j^{(3)}$ -Werte ($j=1...6$), die dort in Spalte 2 zusammengestellten angepaßten Effektivzinssätze, während die Spalte 3 die ($r_o=\infty$)-Effektivzinssätze enthält.

Durch Summierung dieser Werte und Division durch 6 läßt sich "unmittelbar", d.h. nach der direkten Bestimmungsmethode der $r_{eoa}^{(3)}$ bzw. ${}_{\infty}r_e^{(3)}$ -Wert errechnen
 $r_{eoa}^{(3)} = 0,0632604$ bzw. ${}_{\infty}r_e^{(3)} = 0,0632568.$

Bei der Anwendung der indirekten (mittelbaren) Bestimmungsmethode zur Berechnung des arithmetischen Mittels der angepaßten (bzw. ($r_o=\infty$))-Effektivzinssätze bestimmt man sowohl das arithmetische ($c_a^{(3)} = 3,1939\bar{3}$) als auch das (direkte) harmonische Mittel ($c_{hM}^{(3)} = 3,193779$) der $c^{(n)}$ -Werte (Spalte 2 der Tabelle III-3-1)¹⁾. Aus ihnen erhält man im Anpassungsfall den $r_{eoa}^{(3)*}$ bzw. den $r_{eoh}^{(3)*}$ -Wert nach der

1) Tabelle III-3-1 auf S.147 bezieht sich auf die Kurse und Effektivzinssätze, die sich im Falle $r_o=5\%$ ergeben; daher ist nur die Spalte 2 dieser Tabelle, die die $c_j^{(3)}$ -Werte ($j=1...6$) sowie die verschiedenen $c^{(n)}$ -Werte $c_a^{(3)}$, $c_{gM}^{(3)}$, $c_g^{(3)}$, $c_{hM}^{(3)}$ und $c_h^{(3)}$ enthält, hier verwertbar

Formel

$$r_{eo}^{(3)*} = \frac{\Pi^{(3)} - 1}{c^{(3)}},$$

die für $c_a^{(3)} = 3,1939\bar{3}$ den Quotienten

$$r_{eoa}^{(3)*} = \frac{0,20204}{3,1939\bar{3}} = 0,0632574$$

und für $c_{hM}^{(3)} = 3,193779$ den Quotienten

$$r_{eohM}^{(3)*} = \frac{0,20204}{3,193779} = 0,0632604$$

liefert.

Wieder ist die Übereinstimmung von $r_{eohM}^{(3)*}$ und $r_{eoa}^{(3)}$ vollständig, während der $r_{eoa}^{(3)*}$ -Wert vom $r_{eoa}^{(3)}$ -Wert zwar nicht stark ($0,0632604 - 0,0632574 = 30 \cdot 10^{-7}$), aber doch merklich abweicht.¹⁾ (Im 1. Beispiel (Laufzeit $n=2$) beträgt die entsprechende Differenz $r_{eoa}^{(2)} - r_{eoa}^{(2)*} = 0,0399513 - 0,0399509$ neun Einheiten auf der siebten Stelle hinter dem Komma, also $9 \cdot 10^{-7}$).

Für den indirekt oder mittelbar bestimmten arithmetischen Mittelwert des ($r_o = \infty$)-Effektivzinssatzes ergeben sich bei Benutzung der obigen $c^{(n)}$ -Werte nach der für die (Einzel)-Effektivzinssätze gültigen Formel

$$\frac{1 + {}_{\infty}r_{ej}^3 - 1}{(1 + {}_{\infty}r_{ej})^3 \cdot {}_{\infty}r_{ej}} = \frac{c_j^{(3)}}{\Pi^{(3)}} \quad (j=1 \dots 6),$$

wenn man den Laufindex "j" durch den Index "a" für den arithmetischen Mittelwert bzw. den Index "hM" für den (direkten) harmonischen Mittelwert einsetzt

$${}_{\infty}r_{ea}^{(3)*} = 0,0632519 \quad \text{bzw.} \quad {}_{\infty}r_{ehM}^{(3)*} = 0,0632609.$$

1) Außerdem ist auch die Übereinstimmung zwischen dem direkten arithm. Mittelwert $r_{eoa}^{(3)}$ der angepaßten Effektivzinssätze $r_{eoj}^{(3)}$ ($j=1 \dots 6$) und dem indirekten geom. Mittelwert der Zinssätze der gegebenen Zinssatzfolge r_i ($i=1 \dots 3$), nämlich $r_g = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08 - 1} = 0,0632604$, vollständig.

Würde man die direkte bzw. indirekte Bestimmungsmethode für die Mittelwerte der Effektivzinssätze im Falle $n=3$, also $n! = 6$ durch Beschränkung der Anzahl der Permutationen von sechs auf zwei, d.h. etwa auf die monoton steigende bzw. monoton fallende Zinssatzfolge (5/6/8) mit dem $c^{(3)}$ -Wert $c_1^{(3)} = 3,2248$ bzw. $c_6^{(3)} = 3,163$, zu vereinfachen versuchen, müßte damit eine etwas größere Ungenauigkeit im Ergebnis in Kauf genommen werden, die aber hier schon bei der direkten Bestimmungsmethode (Zweier-Mittelwert aus r_{eo1} und r_{eo6}) auftritt.

Der arithmetische Mittelwert, der sich bei der direkten Bestimmungsmethode bei der Beschränkung auf die Folgen 1 und 6, also auf die angepaßten Effektivzinssätze

$$r_{eo1}^{(3)} = 0,0626519 \quad \text{und} \quad r_{eo6}^{(3)} = 0,063876,$$

ergibt und der mit $r_{eo/1,6}^{(3)}$ bezeichnet werden soll,

ist $r_{eo/1,6}^{(3)} = 0,0632639$, weicht also um $35 \cdot 10^{-7}$ vom

Gesamtmittelwert $r_{eoa}^{(3)} = 0,0632604$ ab.

Der nach der indirekten Bestimmungsmethode aus

$c_{1/6}^{(3)} = 3,1939$ errechnete (arithm.) Zweier-Mittelwert

$$r_{eo/1,6}^{(3)*} \quad \text{ist} \quad \frac{0,20204}{3,1939} = 0,063258 \quad \text{mit einer Abwei-}$$

chung von $24 \cdot 10^{-7}$ vom Gesamtmittelwert $r_{eoa}^{(3)}$ nach der

anderen Seite, d.h. das Mittel aus dem direkt bzw. indirekt bestimmten Zweier-Mittelwert des Permutationspaares 1/6

$$(r_{eo/1,6}^{(3)} + r_{eo/1,6}^{(3)*}) : 2 = 0,0632609,$$

würde einen sehr guten Näherungswert für den $r_{eoa}^{(3)}$ -Wert ergeben.

Der Versuch, die Berechnung von Mittelwerten aus $n!$ Einzelwerten, wenn alle n Zinssätze einer gegebenen Zinssatzfolge voneinander verschieden sind bzw. von $\binom{2m}{m}$ für $n=2m$ verschiedenen Einzelwerten, wenn die Zinssatzfolge aus zwe-

Gruppen ($m = \frac{n}{2}$) unter sich gleicher Zinssätze besteht, dadurch zu vereinfachen, daß man nur einige charakteristische Permutationspaare zur Mittelung heranzieht, führte bei den zuletzt beschriebenen Zinssatzfolgen zur gesonderten Betrachtung der monotonen bzw. alternierenden Zinssatzfolgen.

Der Begriff der alternierenden Zinssatzfolge läßt sich allerdings nicht immer eindeutig definieren, weswegen auch im Beispiel von Lutz nur von den monotonen Zinssatzfolgen des Permutationspaares 1/6 die Rede war.

Benutzt man für $n=4$ wieder das Beispiel der aus je zwei gleichen Zinssätzen bestehenden Zinssatzfolge (3,3,5,5) und deren Permutationen, so würden sich im Anpassungsfalle folgende Zahlenwerte ergeben ¹⁾:

Für das monotone Permutationspaar 1/6 erhält man nach der direkten Bestimmungsmethode den mittleren angepaßten Effektivzinssatz

$$r_{eo/1,6}^{(4)} = \left(\frac{\Pi^{(4)} - 1}{c_1^{(4)}} + \frac{\Pi^{(4)} - 1}{c_6^{(4)}} \right) : 2 = \frac{\Pi^{(4)} - 1}{c_{1,6/hM}^{(4)}} ,$$

wo $c_{1,6/hM}^{(4)}$ das (direkte) harmonische Mittel von $c_1^{(4)}$ und $c_6^{(4)}$ ist, bzw.

nach der indirekten Bestimmungsmethode den angepaßten Effektivzinssatz

$$r_{eo/1,6}^{(4)*} = \frac{\Pi^{(4)} - 1}{c_{1/6}^{(4)}} ,$$

wo $c_{1/6}^{(4)}$ das arithmetische Mittel von $c_1^{(4)}$ und $c_6^{(4)}$ ist.

Einsetzen der $\Pi^{(4)}$ - bzw. der $c^{(4)}$ -Werte ²⁾ liefert für $r_{eo/1,6}^{(4)}$ den Zahlenwert 0,0399529, der vom Gesamt-

1) Vgl. Tab. II-6-3, S. 108

2) Vgl. Tab. II-6-3, ebenda

mittelwert $r_{\text{eoa}}^{(4)} = 0,0399519$ um $10 \cdot 10^{-7}$ nach oben

abweicht. Die Abweichung für den Zahlenwert von
 $r_{\text{eo}/1,6}^{(4)*} = 0,0399490$ vom Gesamtmittelwert $r_{\text{eoa}}^{(4)}$
beträgt $29 \cdot 10^{-7}$.

Für das alternierende Permutationspaar 2/5 findet man entsprechend die Werte

$$r_{\text{eo}/2,5}^{(4)} = \frac{0,1696422}{c_{2,5/\text{HM}}^{(4)}} = 0,0399519 \quad \text{mit der Abweichung } 0 \quad \text{vom } r_{\text{eoa}}^{(4)}\text{-Wert}$$

bzw.

$$r_{\text{eo}/2,5}^{(4)*} = \frac{0,1696422}{c_{2/5}^{(4)}} = 0,0399509 \quad \text{mit der Abweichung } 10 \cdot 10^{-7} \quad \text{(nach unten) vom } r_{\text{eoa}}^{(4)}\text{-Wert.}$$

Auch für die angepassten Effektivzinssätze stellt somit der mit Hilfe des alternierenden Permutationspaares errechnete Zweier-Mittelwert eine bessere Näherung für den Gesamtmittelwert r_{eoa} dar als der Zweier-Mittelwert, der mit

Hilfe des monotonen Permutationspaares bestimmt wurde, wobei die nach der indirekten Methode bestimmten Zweier-Mittelwerte für beide Folgenpaare vom Sollwert (Gesamtmittelwert) jeweils stärker, und zwar um $10 \cdot 10^{-7}$ bzw. $29 \cdot 10^{-7}$, abweichen als die nach der direkten Methode bestimmten Zweiermittelwerte.

IV. Die praktische (numerische) Effektivzinssatzbestimmung (Näherungsverfahren)

1. Bestimmungsverfahren auf der Grundlage der linearen Interpolation

a) Das sogenannte exakte Lösungsverfahren (r_e/r_o -Interpolation)

Genau genommen werden auch bei der "gewöhnlichen" Berechnung von sogenannten Sollwerten für die Effektivzinssätze Näherungsverfahren benutzt, falls der Grad der Bestimmungsgleichungen größer als drei oder vier ist. Solche mehr oder weniger als exakt zu bezeichnende Verfahren sind z.B. das Lösungsverfahren der "regula falsi" (Sehnenverfahren), das Newton'sche Verfahren (Tangentenverfahren) oder andere iterative Verfahren, die sukzessiv immer bessere, d.h. genauere Näherungswerte, für die gesuchten Zahlenwerte liefern.

Bei der Betrachtung der Bestimmungsgleichungen für die verschiedenen Effektivzinssätze r_e (yield-to-maturity) in Abhängigkeit von den Einperiodenterminzinssätzen r_i ($i=1, \dots, n$) einer jeweils als gegeben angesehenen Zinssatzfolge erkennt man, daß der Grad dieser Gleichungen der jeweiligen Periodenlänge n , also der Laufzeit, gleich ist. Schon bei einer Laufzeit von nur 3 Perioden sind die betreffenden Bestimmungsgleichungen für r_e also vom höheren als 2. Grade in r_e , womit praktisch, wenn man von gewissen Sonderfällen absieht, Lösungen in geschlossener mathematischer Form unmöglich sind. Das angemessene Lösungsverfahren solcher Gleichungen (Aufsuchen der reellen Nullstellen der impliziten Form der

betreffenden Bestimmungsgleichungen) ist, da es nur auf reelle Lösungen ankommt, die "regula falsi", ein lineares Interpolationsverfahren, das vom mathematischen Standpunkt aus als Intervallschachtelung zu bezeichnen ist, dessen Zwischenwerte sukzessive Näherungswerte für den Grenzwert der Intervallschachtelung (Nullstelle der betreffenden Funktion) darstellen.

Die genannten Bestimmungsgleichungen für r_e lauten in der impliziten Form

$$r_o \overline{p_o^{(n)}} - r_o p_o^{(n)} = 0.$$

Man erhält sie durch Umformung der einander gleichgesetzten Kursgleichungen $r_o p_o^{(n)} = r_o \overline{p_o^{(n)}}$.

Dabei ist $r_o p_o^{(n)}$ (ungequerte Kursgröße) der eindeutig durch die gegebene Zinssatzfolge r_i ($i=1,2,3$) und den gegebenen Couponsatz r_o bestimmte Anfangskurs, z.B.

bei (5/6/8//6) ist der Kurs $p_o^{(3)} = 0,9928854$,

bei (5/6/8//5) ist dieser Kurs $0,9660577$.

Dagegen ist

$$r_o \overline{p_o^{(n)}} = \frac{1 + r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^n} \quad (\text{gequerte Kursgr.})$$

durch den gegebenen Couponsatz r_o (im obigen Beispiel $r_o = 0,06$) und den Effektivzinssatz r_e eindeutig bestimmt, weswegen umgekehrt, wenn r_e gesucht wird, diese Gleichung eine Bestimmungsgleichung für r_e vom n -ten Grade (im Hauptnenner, formal vom $n+1$ -ten Grade) in r_e darstellt.

Als Näherungsverfahren (NV1, NV2, NV3, NV4) für die Bestimmung von r_e werden nachfolgend außer zwei

Interpolationsverfahren (NV1 und NV2) noch zwei weitere Verfahren besprochen, die man als r_e -Bestimmung mittels r_o -freier Kurskomponente (NV3) bzw. als partielle rekursive Substitution (NV4) bezeichnen kann. Hinzu kommt noch ein weiteres Verfahren NV5, das wegen der Verwendung bestimmter Mittelwerte als Effektivzinssatzbestimmung mit Hilfe des gewichteten harmonischen oder arithmetischen Mittelwertes bezeichnet werden kann.

Bei den Interpolationsverfahren NV1 und NV2 werden als wesentlich entweder die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Couponsatz (NV1, NV1a und NV1*) oder die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Kurs (NV2, NV2a und NV2a*) zugrundegelegt.

Beim sogenannten "exakten" Bestimmungsverfahren handelt es sich - wie gesagt - um eine r_e -Bestimmung mit Hilfe der regula falsi, d.h. um ein Interpolationsverfahren, das - abgesehen von der Umkehrung der Interpolationsrichtung bei den genannten Näherungsverfahren (r_o/r_e - statt r_e/r_o -Interpolation) - das gleiche Lösungsprinzip (lineare Interpolation) verwendet wie diese.

Zur Bezeichnung der beim linearen Interpolationsverfahren auftretenden einander entsprechenden Gesamt- bzw. Teildifferenzen werden außer den Symbolen D_e und D_{e1} für die r_e -Gesamtdifferenz bzw. r_e -Teildifferenz die Symbole D_o und D_{o1} für die r_o -Gesamtdifferenz bzw. die r_o -Teildifferenz in NV1, NV1a und NV1a* sowie die Symbole D_p und D_{p1} für die $\overline{P_o}$ -Gesamtdifferenz bzw. $\overline{P_o}$ -Teildifferenz in NV2, NV2a und NV2a* benutzt.

Wichtig für die praktische Durchführung der Interpolation ist vor allem die Frage, von welcher Intervall-Länge bzw. von welcher Intervall-Lage bei den einzelnen linearen

Interpolationsverfahren zweckmäßig auszugehen ist. Im Hinblick auf das Thema dieser Arbeit, für das das Normalintervall-Modell von Malkiel von besonderer Bedeutung ist, erscheint es sinnvoll, als Intervallgrenzen, also als Randwerte des Ausgangsintervalles der Interpolation (das gilt für NV1 und NV2), den jeweils größten (r_M) bzw. kleinsten (r_m) Einperiodenterminzinssatz der gegebenen Zinssatzfolge zu verwenden.

Allerdings muß schon hier angemerkt werden, daß der "sinnvolle" r_e -Wertebereich, wenn man r_e in Abhängigkeit von r_o oder $\overline{P_o}$ betrachtet, wesentlich kleiner ist als der soeben durch die Randwerte r_m und r_M gekennzeichnete Bereich.

Wie schon im Abschnitt über die Abhängigkeit des Effektivzinssatzes vom Couponsatz gezeigt, entspricht einer Änderung des Couponsatzes r_o von $r_o = 0$ bis $r_o = \infty$ nur eine r_e -Änderung von wenigen Prozenten bzw. Bruchteilen von Prozenten; z.B. ergibt sich für das Lutz-Beispiel mit der Zinssatzgruppe (5/6/8//5) ein sinnvoller r_e -Wertebereich von

$$r_{e2} = r_g = 0,0632604 \quad (\text{zu } r_{o2} = 0 \text{ gehörig})$$

bis

$$r_{e1} = r_{\infty} = 0,0580322 \quad (\text{zu } r_{o1} = \infty \text{ gehörig}),$$

also ein Bereich von der Breite

$$D_e = r_{e2} - r_{e1} = r_g - r_{\infty} = 0,0052282,$$

das ist etwas mehr als 1/2%.²⁾

1) Das Symbol r_{∞} ist die vereinfachte Schreibweise für das Symbol ${}_{\infty}r_e^{(i)}$, wobei i die Länge der Laufzeit und ∞ die Höhe des Couponsatzes bezeichnen.

2) Vgl. S. 79

Bei der r_e/r_o -Interpolation¹⁾, d.h. bei dem Interpolationsverfahren, bei dem zuerst die r_o -Differenz, dann die zugehörige r_e -Differenz bestimmt wird, geht man so vor, daß man mittels der Gleichung

$$r_o \overline{p_o^{(n)}} = \frac{1 + r_o \left[1 + (1+r_n) + \dots \right]}{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)}$$

die Effektivzinssätze r_{e1} und r_{e2} berechnet, die zu den Randwerten r_{o1} und r_{o2} des Ausgangsintervalles gehören, und zwar bei konstantem Kurs $r_o \overline{p_o^{(n)}}$, der durch die gegebene Zinssatzgruppe ($r_i (i=1, \dots, n) / r_o$) eindeutig festgelegt ist.

Ändert man den ursprünglichen Couponsatz r_o jeweils in Richtung auf einen der beiden Randwerte r_{o1} bzw. r_{o2} , so entspricht dieser r_o -Änderung (D_o) jeweils eine bestimmte r_e -Änderung (D_e) und umgekehrt.

Bei der r_e -Bestimmung mittels r_e/r_o -Interpolation wird zunächst das Verhältnis der (aus den als gegeben angenommenen $r_{oi} (i=1, 2)$ -Werten gebildeten) Teildifferenzen $D_{o1} = r_o - r_{o1}$ (bzw. $D_{o2} = r_o - r_{o2}$) zur Gesamtdifferenz $D_o = r_{o2} - r_{o1}$ bestimmt und dann das Verhältnis

$$\frac{D_{o1}}{D_o} \quad (\text{bzw.} \quad \frac{D_{o2}}{D_o})$$

dem entsprechenden Verhältnis aus den zugehörigen r_e -Differenzen

$$\frac{D_{e1}}{D_e} \quad (\text{bzw.} \quad \frac{D_{e2}}{D_e})$$

gleichgesetzt.

1) Die r_e/r_o - (bzw. r_e/p_o -)Interpolation kennzeichnet das "exakte" Lösungsverfahren, d.h. die Auflösung der impliziten Bestimmungsgleichung für die gesuchte Größe (r_e) in die (r_e -)explizite Form.

Dabei bedeutet D_e die Differenz der r_{ei} -Werte ($i=1,2$), die beim konstanten Kurs $r_o^{(n)}$ (r_o ist der Couponsatz der gegebenen Zinssatzgruppe, im Beispiel (5/6/8//6), also $r_o = 0,06$) zu r_{oi} ($i=1,2$) gehören, während D_{e1} (D_{e2}) die Teildifferenzen $r_e - r_{e1}$ (bzw. $r_e - r_{e2}$) bezeichnen.

Hinsichtlich der Forderung, den Kurs bei den Näherungsverfahren NV1 und NV1a bzw. den Couponsatz bei den Näherungsverfahren NV2, NV2a konstant zu halten, ist jedoch die Feststellung wichtig, daß sich bei Zugrundelegung der Gleichung

$$r_o^{(n)} = \frac{1 + r_o \left[1 + (1+r_n) \dots \right]}{n \prod_{i=1} (1 + r_i)}$$

der Kurs $r_o^{(n)}$ (ungequerte Kursgröße) zwangsläufig mit dem Couponsatz r_o ändert.

Die aus der Kursgleichung

$$r_o^{(n)} = \frac{1 + r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

(gequerte Kursgröße) für die $r_o = r_{oi}$ ($i=1,2$)-Werte sich ergebenden r_{ei} ($i=1,2$)-Werte-und umgekehrt - die man beim Festhalten der linken Seite dieser Gleichung,

also von $r_o^{(n)}$ am eindeutig durch die gegebene Zinssatzgruppe, z.B. durch (5/6/8//6) bestimmten Zahlenwert

$r_o^{(n)}$ wegen $r_o^{(n)} = r_o^{(n)}$
 $r_o(\text{geg.})^{(n)}$

erhält (hier $r_o^{(3)} = 0,9928854$), sind natürlich von den "richtigen" r_{ei} ($i=1,2$) bzw. bei der Umkehrung der Interpolationsverfahren von den "richtigen" r_{oi} ($i=1,2$) Werten in dem Maße verschieden, in dem der

$r_{oi}^{(n)}$ ($i=1,2$)-Wert vom $r_o^{(n)}$ -Wert abweicht.

(Im obigen Beispiel ist $r_{o1} = 0,05$, $r_{o2} = 0,08$, also

$r_{o1}^{(3)} = 0,9660577$, $r_{o2}^{(3)} = 1,0465408$ und der zum

Zielwert $r_o = r_o(\text{geg.}) \approx 0,06$ der Interpolation gehörige

Kurs $r_o(\text{geg.})^{p_o^{(3)}} = 0,9928854$.

Erst wenn bei der Interpolation der Zielwert $r_o(\text{geg.}) (=0,06$ im obigen Beispiel) im r_o -Intervall

(r_{o1}, r_{o2}) erreicht ist, werden

$r_o(\text{geg.})^{p_o^{(n)}}$ und $r_o(\text{geg.})^{\overline{p_o^{(n)}}}$ gleich,
ist die Differenz $p_o^{(n)} - \overline{p_o^{(n)}}$ also gleich Null.

Mit anderen Worten, die zu r_{oi} ($i=1,2$) gehörigen mit Hilfe der Gleichung

$$r_o(\text{geg.})^{\overline{p_o^{(n)}}} = \frac{1 + r_{oi} \left[(1+r_{ei})^n - 1 \right] : r_{ei}}{(1 + r_{ei})^n} \quad (i=1,2),$$

wo $r_o(\text{geg.})^{p_o^{(n)}}$ auf der linken Seite nicht zu den r_o -Werten r_{oi} ($i=1,2$) der rechten Seite gehört, sondern

den konstanten Wert $r_{o=\text{geg.}}^{p_o^{(n)}} = r_{o=\text{geg.}}^{p_o^{(n)}}$

besitzt, bestimmbar r_{ei} ($i=1,2$)-Werte sind rein rechnerische (verfahrensspezifische), aber keine richtigen Zahlenwerte i.S. der Gleichheit von gequerten und ungequerten Kursgrößen, sie haben also nur kalkilmäßige, und erst wenn der Couponsatz r_o sich dem gegebenen Couponsatz $r_{o=\text{geg.}}$ nähert, also beim Zielwert (hier 0,06) der Interpolation, exakte reale Bedeutung.

Eine Vereinfachung der Berechnung des Effektivzinssatzes im Sinne einer Ersparnis an Rechenarbeit oder einer Verminderung der Lösungsschwierigkeit durch Herabsetzung des Grades der bei der Lösung benutzten Bestimmungsgleichungen tritt allerdings bei diesem Interpolationsverfahren (sog. "exakte Lösung") nicht ein.¹⁾

1) Die numerische Durchführung der exakten r_e -Bestimmung im Falle der Zinssatzgruppe (5/6/8//6) wird im folg. Abschnitt nachgeholt, wo Ergebnisse und Einzelschritte der "exakten Bestimmung" (r_e/r_o -Interpolation) und des Näherungsverfahrens NV1 (r_o/r_e -Interpolation) miteinander verglichen werden.

b) r_o/r_e -Interpolation als Umkehrung der r_e/r_o -Interpolation

Eine erhebliche Vereinfachung der r_e -Berechnung ergibt sich jedoch, wenn man das zuvor beschriebene Verfahren der r_o -Bestimmung, also die r_e/r_o -Interpolation umkehrt. Bei dieser Umkehrung (r_o/r_e -Interpolation) wird anstelle der r_o -Differenz zuerst die r_e -Differenz ($D_e = r_{e2} - r_{e1}$) und dann erst die zugehörige r_o -Differenz gebildet; dieses Interpolationsverfahren wird mit NV1 bezeichnet.

Faßt man nämlich r_m und r_M nicht als Ränder eines Couponsatzintervalles, sondern als Ränder ($r_{e1} = r_m$ und $r_{e2} = r_M$) eines Effektivzinssatzintervalles

$$r_{e2} - r_{e1} = r_M - r_m = D_e \quad \text{auf,}$$

so kann man zu ihnen rein rechnerisch ¹⁾ mittels der beiden linearen Gleichungen

$$\overline{r_o p_o^{(n)}} = \frac{1 + r_{oi} \left[(1 + r_{ei})^n - 1 \right] : r_{ei}}{(1 + r_{ei})^n} \quad (i=1,2)$$

die zugehörigen r_{oi} ($i=1,2$)-Werte bestimmen. $\overline{r_o p_o^{(n)}}$ wird dabei konstant gehalten.

Mit Hilfe des Verhältnisses der Effektivzinssatzdifferenz $D_e = r_M - r_m$ und der zugehörigen Couponsatzdifferenz $D_o = r_{o2} - r_{o1}$ läßt sich dann eine r_o/r_e -Interpolation (NV1-Verfahren) über einander entsprechende Teildifferenzen D_{e1} bzw. D_{e2} und D_{o1} bzw. D_{o2} durchführen.

Beim Näherungsverfahren NV1 kommt man also mit der Lösung von linearen Bestimmungsgleichungen statt von Bestimmungsgleichungen n-ten Grades beim exakten Verfahren (r_e/r_o -Interpolation) aus, was die Berechnung des r_e -Wertes

1) An sich ist eine Änderung des Effektivzinssatzes - wie bereits bemerkt - nur zwischen den Grenzwerten r_g und r_{oo} , d.h. im Beispiel von Lutz zwischen 0,0632604 und 0,0580322, sinnvoll.

wesentlich erleichtert:

Der Nachteil dieser Art Näherungsrechnung mit Hilfe rein rechnerischer (verfahrensspezifischer) Zwischenwerte besteht darin, daß die r_e - bzw. r_o -Zwischenwerte ohne exakte reale Bedeutung sind. Dieser Nachteil wird beim NV1a*-Verfahren beseitigt.

Zur Klärung der Frage nach der Größe der erzielten Vereinfachung sowie nach der Größe der durch diese Vereinfachung möglicherweise in Kauf genommenen Ungenauigkeit bei der Berechnung des gesuchten Zahlenwertes (hier r_e -Wertes) erscheint es zweckmäßig, beide Interpolationsverfahren, nämlich die r_e/r_o -Interpolation und die r_o/r_e -Interpolation, die oben mit NV1 bezeichnet worden ist, einander gegenüberzustellen. Zum Vergleich der in beiden Fällen zu bewältigenden Rechenarbeit soll wieder das durch die Zinssatzgruppe (5/6/8//6) bestimmte, modifizierte Beispiel von Lutz dienen:

Zunächst findet man für den konstant zu haltenden, durch (5/6/8//6) eindeutig bestimmten Kurs ${}_6P_o^{(3)}$, den Wert

$$(1 + 0,06 \cdot 3,2248) : 1,20204 = 0,9928854.$$

Auch bei den Interpolationsverfahren NV1a, NV2 und NV2a bleibt dieser Kurs (0,9928854 im obigen Beispiel) unverändert.

Näherungsverfahren der r_e/r_o -Interpolation

1) D_o -Bestimmung

$$r_{o1} = r_m = 0,05 / r_{o2} = r_M = 0,08$$

$$\text{also } D_o = 0,08 - 0,05 = 0,03$$

2a) r_{e1} -Bestimmung

Aus der Bestimmungsgleichung für r_{e1}

$$\frac{1 + 0,05 \left[(1+r_{e1})^3 - 1 \right] : r_{e1}}{(1 + r_{e1})^3}$$

findet man für r_{e1} rein rechnerisch den Wert 0,0526254, ein Wert, der außerhalb des sinnvollen r_e -Bereiches liegt.

(Diese Bestimmungsgleichung ist vom 3. Grade in r_{e1}).

2b) r_{e2} -Bestimmung

Aus der Bestimmungsgleichung für r_{e2}

$$\frac{1 + 0,08 \left[(1+r_{e2})^3 - 1 \right] : r_{e2}}{(1 + r_{e2})^3} = 0,9928854$$

findet man rein rechnerisch für r_{e2} den Wert 0,0827745, der ebenfalls außerhalb des sinnvollen r_e -Bereiches liegt.

(Bestimmungsgleichung wie zuvor vom 3. Grade in r_{e2}).

3) $V_{e/o}$ -Bestimmung

$$\begin{aligned} \text{Aus } D_o &= 0,03 \text{ und } D_e = r_{e2} - r_{e1} \\ &= 0,0827745 - 0,0526254 \\ &= 0,0301491 \end{aligned}$$

folgt für $V_{e/o} = D_e : D_o$ der Wert

$$V_{e/o} = \frac{0,0301491}{0,03} = 1,00497.$$

4) Bestimmung der Teildifferenzen D_{o1} und D_{e1}

$$D_{o1} = r_o - r_{o1} = 0,06 - 0,05 = 0,01$$

$$D_{e1} = D_{o1} \cdot V_{e/o} = 0,01 \cdot 1,00497 = 0,0100497$$

5) $r_{e(I)}$ -Bestimmung

($r_{e(I)}$ soll den durch Interpolation bestimmten r_e -Wert bezeichnen).

$$\begin{aligned} r_{e(I)} &= r_{e1} + D_{e1} = 0,0526254 + 0,0100497 \\ &= 0,0626751 \end{aligned}$$

6) Fehlerrechnung

Der "Fehler", d.h. die Differenz zwischen dem Sollwert $r_{e(S)}$ = 0,0626748 und dem soeben errechneten Interpolationswert $r_{e(I)}$ = 0,0626751 beträgt $3 \cdot 10^{-7}$.

NV1: Näherungsverfahren der r_o/r_e -Interpolation

1) D_e -Bestimmung

$$r_{el} = r_m = 0,05 \quad / \quad r_{e2} = r_M = 0,08 \quad 1)$$

$$\text{also } D_e = 0,08 - 0,05 = 0,03$$

2a) r_{o1} -Bestimmung

Aus der Bestimmungsgleichung für r_{o1}

$$\frac{1 + r_{o1} (1,05^3 - 1) : 0,05}{1,05^3} = 0,9928854$$

findet man für r_{o1} den Wert 0,0473874.

(Diese Bestimmungsgleichung ist vom 1. Grad in r_{o1}).

2b) r_{o2} -Bestimmung

Aus der Bestimmungsgleichung für r_{o2}

$$\frac{1 + r_{o2} (1,08^3 - 1) : 0,08}{1,08^3} = 0,9928854$$

findet man für r_{o2} den Wert 0,0772392.

(Auch diese Bestimmungsgleichung ist vom 1. Grade in r_{o2}).

3) $V_{e/o}$ -Bestimmung

$$\begin{aligned} \text{Aus } D_e &= 0,03 \quad \text{und} \quad D_o = r_{o2} - r_{o1} \\ &= 0,0772392 - 0,0473874 \\ &= 0,0298518 \end{aligned}$$

1) Vgl. die Fußnote auf S. 167

ergibt sich für $V_{e/o} = D_e : D_o$ der Wert

$$V_{e/o} = 0,03 : 0,0298518 = 1,0049645.$$

4) Bestimmung der Teildifferenzen D_{o1} und D_{e1}

$$D_{o1} = r_o - r_{o1} = 0,06 - 0,0473874 = 0,0126126$$

$$D_{e1} = D_{o1} \cdot V_{e/o} = 0,0126126 \cdot 1,0049645 = 0,0126752$$

5) $r_{e(I)}$ -Bestimmung

$$r_{e(I)} = r_{e1} + D_{e1} = 0,05 + 0,0126752 = 0,0626752$$

6) Fehlerrechnung

Der "Fehler", d.h. die Differenz zwischen Sollwert $r_e = 0,0626748$ und dem soeben errechneten Interpolationswert $0,0626752$ ist $4 \cdot 10^{-7}$. Diese Differenz soll mit $D(NV1)$ bezeichnet werden.

Wie schon gesagt, stellt nur das 2. Verfahren (NV1) eine wirkliche Vereinfachung der r_e -Bestimmung dar, denn dieses Verfahren erfordert - im Gegensatz zur r_e/r_o -Interpolation, die die Lösung zweier Gleichungen n-ten Grades verlangt - nur die Lösung von zwei linearen Bestimmungsgleichungen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Genauigkeit der r_e -Bestimmung mittels r_e/r_o - bzw. r_o/r_e -Interpolation von der Intervall-Länge des r_o bzw. r_e -Ausgangsintervalles abhängen muß.

Die Näherungsverfahren NV1 und NV2 besitzen beide das Anfangsintervall (r_m/r_M) , das im r_e -Wertbereich nur formal zulässig ist. Sie unterscheiden sich aber dadurch, daß bei NV1 der Kurs, bei NV2 der Couponsatz während der Interpolation unverändert bleiben.

ei den Näherungsverfahren NV1a (NV1a*) und NV2a (NV2a*) ist das Ausgangsintervall dagegen (r_{eo}/r_g) , wobei es von der gegebenen Zinssatzfolge abhängt, ob r_{eo} kleiner als r_g (im obigen Beispiel 5/6/8) oder ob r_g kleiner als r_{eo} (wie bei der umgekehrten Zinssatzfolge, also 8/6/5) ist.

Verkleinert man die Intervall-Länge $(r_M - r_m)$ des Ausgangsintervalles so, daß das verkleinerte Intervall innerhalb des für den Effektivzinssatz r_e sinnvollen Bereiches (r_g, r_{oo}) liegt, so bieten sich als besonders geeignete Randwerte dieses verkleinerten Ausgangsintervalles der "sogenannte" geometrische Mittelwert r_g (identisch mit dem langfristigen Zinssatz $R^{(3)}$ der klassischen Erwartungstheorie) sowie der der gegebenen Zinssatzfolge angepaßte Effektivzinssatz $r_{eo} (r_{oe})$ an.

Die zur gegebenen Zinssatzfolge gehörigen Zahlenwerte für r_g, r_{eo} und r_{oo} sind

$$r_g = 0,0632604, \quad r_{eo} = 0,0626519, \quad r_{oo} = 0,0580322. \quad 1)$$

Sie sind von dem Couponsatz r_o (z.B. $r_o = 0,05$ oder $r_o = 0,06$, d.h. das unmodifizierte bzw. das modifizierte Beispiel von Lutz) unabhängig, hängen aber von der sukzessiven Reihenfolge der gegebenen Zinssätze ($r_1 = 0,05, r_2 = 0,06, r_3 = 0,08$) ab.

Die Intervall-Länge des verkürzten Ausgangsintervalles

$$r_g - r_{eo} = 0,0632604 - 0,0626519 = 0,0006085$$

umfaßt nur einen Teil, im obigen Beispiel nur etwa 1/10, des sinnvollen r_e -Wertbereiches

$$r_g - r_{oo} = 0,0632604 - 0,0580322 = 0,0052282.$$

Durch Verkleinerung der Länge des Ausgangsintervalles

$$\text{z.B. von } (r_M - r_m) \text{ auf } (r_g - r_{eo})$$

muß im allgemeinen die Genauigkeit des Endergebnisses der Interpolation größer werden, da zeichnerisch die lineare Interpolation die Ersetzung eines Kurvenstückes durch ein Gradenstück bedeutet, und die Abweichung der Sekante von der tatsächlichen Kurve, wenn keine Änderung der Kurvenkrümmung (kein Wendepunkt) vorliegt, umso kleiner ist, je näher die Kurvenpunkte beieinanderliegen,

1) Siehe Fußnote S.163

zwischen denen die Kurve durch die Gerade ersetzt wird.

Allerdings ergibt sich schon bei NVL trotz des verhältnismäßig breiten r_e -Intervalles ($D_e = r_M - r_m = 0,03$) eine so gute Näherung ($4 \cdot 10^{-7}$), daß die hier erreichte Genauigkeit $D(NVL)$ größenordnungsmäßig mit der Rechengenauigkeit (1 bis $2 \cdot 10^{-7}$) des verwendeten Rechengerätes (elektronischer Taschenrechner) vergleichbar ist.

c) r_o/r_e -Interpolation bei Verkürzung des Ausgangsintervalles (NVla-Verfahren)

Das Näherungsverfahren NVla ist wie NVL ein r_o/r_e -Interpolationsverfahren. Es unterscheidet sich von NVL nur durch die Länge des Ausgangsintervalles ($r_g - r_{eo}$ statt $r_M - r_m$). Es wird wieder vom modifizierten Beispiel von Lutz (5/6/3//6) ausgegangen.

1) D_e -Bestimmung

$$r_{e2} = r_g \quad (= R^{(3)}) = \sqrt[3]{1,20204} - 1 = 0,0632604$$

$$r_{e1} = r_{eo} = 0,0626519 \quad 1)$$

$$D_e = r_{e2} - r_{e1} = 0,0632604 - 0,0626519 = 0,0006085.$$

Wie bereits gesagt, bleibt der Kurs 0,9928854 wie bei NVL auch bei NVla unverändert.

Daher darf man bei diesen Verfahren im Gegensatz zum Näherungsverfahren NVla* $r_o = 0$ nicht als den zu $r_{e2} = r_g = 0,0632604$ gehörigen r_o -Wert betrachten, denn zu $r_g = 0,0632604$ gehört nur beim Kurs

$$\frac{1}{1,20204} = 0,831919$$

1) r_{eo} ($= r_{oe}$) genügt der Bestimmungsgleichung

$$1 = \frac{1 + r_{eo} \cdot 3,2248}{1,20204}$$

der r_o -Wert Null, während für NV1 und NV1a der durch (5/6/8//6) eindeutig bestimmte Kurs nicht 0,831919, sondern 0,9928854 ist.

Ebensowenig darf man aus der Tatsache, daß der Zinssatz $r_{el} = r_{eo} = 0,0626519$ der angepaßte Zinssatz für die gegebene Zinssatzfolge ist, beim Verfahren NV1a folgern, daß dazu auch $r_{oe} = 0,0626519$ als formal (d.h. i.S. dieses Verfahrens) richtiger r_o -Wert gehört. Das gilt nur für den Parikurs $p_o^{(3)} = 1$ und nicht für den Kurs 0,9928854.

Wie bereits bei der Besprechung der r_e/r_o -Interpolation dargestellt worden ist, ist zwar durch

$$r_o p_o^{(3)} = \frac{1 + r_o \cdot 3,2248}{1,20204}$$

für jeden r_o -Wert, der bei der gegebenen Zinssatzfolge zugehörige Kurs mitbestimmt¹⁾, doch kann man rechnerisch die r_{ei} ($i=1,2$)-Wertbestimmung mittels der Kursgleichung

$$r_o p_o^{(3)} = \frac{1 + r_o \left[(1 + r_{ei})^n - 1 \right] : r_{ei}}{(1 + r_{ei})^n} \quad (i=1,2)$$

mit konstanter linker Seite

$$r_o p_o^{(3)} = r_o p_o^{(3)} = r_{o(geg.)} p_o^{(3)} = 0,9928854$$

zunächst als selbständigen Verfahrensschritt betrachten, der unabhängig vom $p_o^{(3)}$ -Wert, der erst beim letzten Interpolationsschritt den Kurs $r_o p_o^{(3)}$ in $r_{o(geg.)} p_o^{(3)}$

überführt und dadurch die Gleichheit von

$$r_o p_o^{(3)} \quad \text{und} \quad r_{o(geg.)} p_o^{(3)}$$

herstellt.

2a) r_{o1} -Bestimmung

Soll der Kurs für $r_{el} (= r_{eo}) = 0,0626519$ den Wert

1) Vgl. Verfahren NV1a* bzw. NV2a*

0,9928854 haben, so muß der nach der Kursformel für $P_o^{(3)}$ rechnerisch zugehörige r_{o1} -Wert die Gleichung

$$0,9928854 = \frac{1 + r_{o1} \left[(1,0626519^3 - 1) \right] : 0,0626519}{1,0626519^3}$$

erfüllen, d.h. es muß

$$r_{o1} = 0,0599771$$

sein.

2b) r_{o2} -Bestimmung

Soll der Kurs für r_{e2} ($= r_g$) = 0,0632604 den Wert 0,9928854 haben, so muß der nach der Kursformel für $P_o^{(3)}$ dazugehörige r_{o2} -Wert die Gleichung

$$0,9928854 = \frac{1 + r_{o2} \left[(1,0632604^3 - 1) \right] : 0,0632604}{1,0632604^3}$$

erfüllen, d.h. es muß

$$r_{o2} = \frac{(1,20204 \cdot 0,9928854 - 1) \cdot 0,0632604}{0,20204} \\ = 0,0605826 \text{ sein.}$$

Daraus ergibt sich für D_e der Ausdruck

$$D_e = r_{e2} - r_{e1} = r_g - r_{eo} = 0,0006085$$

und für die zugeordnete r_o -Differenz (D_o) der Wert

$$D_o = r_{o2} - r_{o1} = 0,0605826 - 0,0599771 = 0,0006055.$$

3) $V_{e/o}$ -Bestimmung

Für $V_{e/o}$ ergibt sich aus $V_{e/o} = D_e : D_o$ der Wert

$$V_{e/o} = 0,0006085 : 0,0006055 = 1,0049545.$$

4) Bestimmung der Teildifferenzen (D_{01} und D_{e1})

Die r_o -Teildifferenz D_{01} ist

$$D_{01} = r_o - r_{01} = 0,06 - 0,0599771 = 0,0000229.$$

Ihr entspricht eine r_e -Teildifferenz D_{e1}

$$D_{e1} = V_{e/o} \cdot D_{01} = 0,0000229 \cdot 1,0049545 = 0,0000230.$$

5) $r_{e(I)}$ -Bestimmung

Der gesuchte $r_{e(I)}$ -Wert ist also

$$r_e = r_{e1} + D_{e1} = 0,0626519 + 0,0000230 = 0,0626749.$$

6) Fehlerrechnung

Man erkennt, daß der $r_{e(I)}$ -Wert - verglichen mit dem

Sollwert $r_{e(S)} = 0,0626748$ - eine ausgezeichnete

Näherung darstellt: $D(NVla) = 1 \cdot 10^{-7}$.

Diese Näherung $D(NVla)$ ist besser als $D(NVl)$, nämlich besser als $4 \cdot 10^{-7}$. Sie liegt noch unterhalb der Rechengenauigkeit von 1 bis $2 \cdot 10^{-7}$ des benutzten Gerätes.

Kalkülmäßig stellt natürlich das Näherungsverfahren NVla gegenüber NVl kein neues Verfahren dar, sondern nur einen zweiten Schritt des Näherungsverfahrens NVl, denn der einzige "Unterschied" des Verfahrens NVla gegenüber dem Verfahren NVl ist die Verkürzung des Ausgangsintervalles von $r_M - r_m$ auf $r_g - r_{eo}$. Das aber ist im Grunde genommen ein systemimmanenter Rechenschritt i.S. der Intervallschachtelung für die das Intervall (r_m/r_M) nur das Ausgangsintervall, also den ersten Rechenschritt

darstellt, dem weitere folgen müssen, wenn das Verfahren der Schachtelung, also der Intervallverkürzung, zwecks schrittweiser Verbesserung der Näherungswerte weitergeführt werden soll. Die Notwendigkeit, dem ersten Rechenschritt (r_o/r_e -Interpolation im Intervall (r_m/r_M)) weitere Interpolationen in entsprechend verkürzten Intervallen folgen zu lassen, bestand für das benutzte Beispiel nicht, weil der Näherungswert für r_e , der beim ersten Schritt erzielt wurde $- r_{ei} = 0,0626752$ - schon außergewöhnlich gut war.

- d) r_o/r_e -Interpolation bei allgemeiner Gültigkeit der Gleichung

$$P_o = \overline{P_o} \quad (\text{Näherungsverfahren NVla}^*)$$

Während beim Interpolationsverfahren NVla der durch die Zinssatzgruppe (5/6/8//6) eindeutig bestimmte Kurs ${}_6P_o^{(3)} = 0,9928854$ rein rechnerisch unverändert während des gesamten Interpolationsverfahrens festgehalten wird, also auch dann, wenn der r_o -Wert zwischen r_{o1} und r_{o2} variiert und gemäß

$$r_o P_o^{(3)} = \frac{1 + r_o \cdot 3,2248}{1,20204}$$

auch der Kurs $r_o P_o^{(3)}$ sich von $r_{o1} P_o^{(3)}$ bis $r_{o2} P_o^{(3)}$ ändert, geht man beim Interpolationsverfahren NVla* von einer anderen Betrachtungsweise bezüglich der Beziehung zwischen Effektivzinssatz r_e und Couponsatz r_o aus.

Legt man nämlich die Funktionsgleichung $P_o = \overline{P_o}$ in dem Sinne zugrunde, daß sie nicht nur für die Endwerte, sondern auch für die Zwischenwerte des Interpolationsverfahrens gilt¹⁾, so scheiden zunächst alle r_e -Werte für

- 1) r_o -Wertänderungen sind automatisch mit P_o -Wertänderungen, allerdings mit dem Verstärkungsfaktor $\frac{3,2248}{1,20204}$, verbunden, wie sich aus der Gleichung

$$r_o P_o^{(3)} = \frac{1 + r_o \cdot 3,2248}{1,20204} \quad \text{ergibt.}$$

die Interpolation aus, die außerhalb des sogenannten sinnvollen r_e -Wertbereiches (r_g, r_{oo}) liegen, also alle r_e -Werte größer als 0,0632604 bzw. kleiner als 0,0580322 im unveränderten bzw. modifizierten Beispiel von Lutz.

Für solche außerhalb des sogenannten sinnvollen r_e -Wertbereiches liegende Zinssätze erhält man, wie so- gleich gezeigt werden soll, negative Zahlenwerte für den Couponsatz r_o .

Nach der Gleichung $r_o p_o^{(3)} = \overline{r_o p_o^{(3)}}$, die man sowohl als Bestimmungsgleichung für r_e auffassen kann, nämlich dann wenn man r_o als unabhängige Variable betrachtet, als auch als Bestimmungsgleichung für r_o , nämlich wenn man r_e als unabhängige Variable oder beim Verfahren NVla* als gegeben betrachtet, besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen r_e und r_o unabhängig vom Kurs. Dieser läßt sich hinterher aus dem gegebenen r_e -Wert und dem ihm zugeordneten r_o -Wert mittels der Kursgleichung für $r_o p_o^{(n)}$ bestimmen.

Angenommen, r_e habe den Zahlenwert 0,05. Dieser Wert ist kleiner als 0,05802282, liegt also außerhalb des sinnvollen r_e -Wertbereiches.

Setzt man in

$$\frac{1 + r_o \cdot 3,2248}{1,20204} = \frac{1 + r_o \cdot \left[\frac{(1+r_e)^3 - 1}{(1+r_e)^3} \right] : r_e}{(1+r_e)^3}$$

für r_e den Wert 0,05 ein, so geht die rechte Seite der Gleichung in

$$\frac{1 + r_o \cdot 0,157625 : 0,05}{1,157625} \quad \text{über,}$$

während die linke von r_e unabhängige Seite unverändert bleibt.

Löst man dann die Gleichung nach r_o auf, so erhält man für r_o den Wert

$$r_o = \frac{1,20204 - 1,157625}{3,2248 \cdot 1,157625 - \frac{1,20204 \cdot 0,157625}{0,05}}$$

$$= \frac{0,0444150}{-0,0563219} = -0,788592 \quad (-78,86\%)$$

Angenommen, r_e habe den Zahlenwert 0,07. Dieser Wert ist größer als 0,0632604, liegt also außerhalb des sinnvollen r_e -Wertbereiches. Entsprechend erhält man in diesem Fall für r_o den Wert

$$r_o = \frac{1,20204 - 1,225043}{3,2248 \cdot 1,225043 - 1,20204 \cdot \frac{0,225043}{0,07}}$$

$$= -0,2672272 \quad (\text{das sind rd. } -26,72\%).$$

Beim Näherungsverfahren NVla* ist die Länge und Lage des Ausgangsintervalles (r_{eo}/r_g) die gleiche wie beim Näherungsverfahren NVla. Dagegen wird bei NVla* im Gegensatz zu NVla von der Gleichheit der gequerten und ungequerten Kursgröße, also von $r_o p_o^{(n)} = r_o p_o^{(n)}$

ausgegangen. Durch diese Gleichsetzung wird der Kurs eliminiert, und man erhält eine Gleichung, die nur noch r_o und r_e enthält. Insbesondere ergibt sich für das Beispiel (5/6/8//6) die Gleichung

$$\frac{1 + r_o \cdot 3,2248}{1,20204} = \frac{1 + r_o \left[(1+r_e)^3 - 1 \right] : r_e}{(1+r_e)^3}.$$

Schreibt man diese Gleichung in r_o -expliziter Form, so lautet sie

$$r_o = \frac{1,20204 - (1+r_e)^3}{3,2248 (1+r_e)^3 - 1,20204 \left[(1+r_e)^3 - 1 \right] : r_e}$$

Da das Ausgangsintervall $(r_{e1}, r_{e2}) = (r_{eo}, r_g)$ bewußt so gewählt worden ist, daß die zu r_{ei} ($i=1,2$) gemäß

Gleichung $r_{oi}^{p(n)} = \overline{r_{oi}^{p(n)}}$ zugehörigen r_o -Werte

r_{oi} ($i=1,2$) bekannt sind (zu $r_{e1} = r_{eo} = 0,0626519$ gehört der r_{oi} -Wert $r_{oe} = 0,0626519$ und zu

$r_{e2} = r_g = 0,0632604$ gehört der r_o -Wert $r_{o2} = 0$)¹⁾,

ist es unnötig, die obige r_o -explizite Gleichung zur Bestimmung der r_o -Werte, die zu den Randwerte r_{eo} und r_g des Ausgangsintervalls gehören, heranzuziehen.

Die r_e -Bestimmung nach dem Näherungsverfahren NVla* vollzieht sich in folgenden fünf bzw. sechs Schritten:

1) D_e -Bestimmung

Aus $r_{e1} = r_{eo} = 0,0626519$ und $r_{e2} = r_g = 0,0632604$ ergibt sich für D_e der Wert

$$r_g - r_{eo} = 0,0632604 - 0,0626519 = 0,0006085.$$

2a) r_{o2} -Bestimmung

Zu $r_{e1} = r_{eo} = 0,0626519$ gehört, da $r_{eo} = r_{oe}$ der der Zinssatzfolge $\{5/6/8\}$ angepaßte Couponsatz identisch ist mit dem zugehörigen angepaßten Effektivzinssatz, der Couponsatz $r_{o1} = r_{oe} = 0,0626519$.

2b) r_{o1} -Bestimmung

Zu $r_{e2} = r_g = 0,0632604$ gehört der r_o -Wert $r_{o2} = 0$.

$$1) \quad {}_oP_o^{(3)} = \frac{1 + 0 \cdot 3,2248}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} = \frac{1}{1,20204} \text{ u. } {}_oP_o^{(3)} = \frac{1 + 0 \left[\dots \right] : r_e}{(1 + r_e)^3},$$

$$\text{also } \frac{1}{1,20204} = \frac{1}{(1+r_e)^3} \text{ oder } 1+r_e = \sqrt[3]{1,20204}$$

$$\text{oder } r_e = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} - 1.$$

3) $V_{e/o}$ -Bestimmung

Aus $r_{o2} = 0$ und $r_{o1} = 0,0626519$ folgt

$$D_o = r_{o2} - r_{o1} = (-) 0,0626519.$$

Für $V_{e/o} = D_e : D_o$ erhält man nach Einsetzung der Werte von 0,0006085 für D_e und $(-) 0,0626519$ für D_o den Wert

$$V_{e/o} = \frac{0,0006085}{-0,0626519} = (-) 0,0097123.$$

4) D_{o1} -(bzw. D_{e1})-Bestimmung

Da der Zielwert (gegebener Couponsatz) $r_o = 0,06$ ist, ergibt sich als r_o -Teildifferenz D_{o1} der Ausdruck

$D_{o1} = r_o - r_{o1} = 0,06 - 0,0626519 = 0,0026519$
und daraus die zugeordnete r_e -Teildifferenz

$$D_{e1} = D_{o1} \cdot V_{e/o} = (-) 0,0026519 \cdot (-) 0,0097123 = 0,0000257$$

5) r_e -Bestimmung

$$r_{ei} = r_{e1} + D_{e1} = 0,0626519 + 0,0000257 = 0,0626776$$

6) Fehlerrechnung

Der Unterschied zwischen dem Sollwert $r_{e(s)} = 0,0626748$

und dem soeben ermittelten Interpolationswert

$$r_{e(I)} = 0,0626776 \text{ ist } D(NV1a^*) = 28 \cdot 10^{-7}.$$

e) P_o/r_e -Interpolation beim Ausgangsintervall (r_m/r_M) (Näherungsverfahren NV2)

Die Näherungsverfahren NV2a und NV2a* sind

P_o/r_e -Interpolationsverfahren; es wird zuerst die

r_e -Differenz der als gegeben betrachteten r_e -Randwerte und daraus rechnerisch die Kursdifferenz D_p bestimmt.

Bei NV2 und NV2a bleibt während des ganzen Interpolationsverfahrens der Couponsatz r_o konstant,

bei NV2a* wird r_o (durch Gleichsetzung der Kursgleichungen) eliminiert.

Im übrigen entsprechen diese Verfahren vollständig den mit NV1, NV1a und NV1a* bezeichneten Verfahren mit dem einzigen Unterschied, daß bei ihnen der Kurs an die Stelle des Couponsatzes tritt.

Während bei NV1 und NV1a bei der Durchführung der Interpolation der Kurs $r_o p_o^{(n)}$ als $r_o p_o^{(n)} = r_o p_o^{(n)}$

(unabhängig von der Tatsache, daß der Kurs $r_o p_o^{(n)}$

bei Änderung von r_o sich mitändert) konstant gehalten wird, gilt bei NV2 und NV2a das gleiche für den Couponsatz r_o , der rechnerisch im Ausdruck für

$r_o p_o^{(n)}$ unverändert bleibt, obwohl auch hier bei Änderung

des Kurses $r_o p_o^{(n)}$ gemäß der nach r_o aufgelösten

Kursgleichung für $r_o p_o^{(n)}$ für verschiedene Kurse $p_{oi}^{(n)}$

($n=1,2$) auch verschiedene r_o -Werte r_{oi} ($i=1,2$) auf-

treten. Die Gleichheit der gequerten und ungequerten

Kursgrößen $r_o p_o^{(n)} = r_o p_o^{(n)}$ gilt dann nicht für die

verfahrensspezifischen rein rechnerischen Zwischenwerte

$r_{oi} p_o^{(n)}$ ($i=1,2$) der Interpolation, sondern nur für deren

Endwert $r_{o(geg.)} p_o^{(n)}$.

NV2: (P/r_e -Interpolation, Ausgangsintervall der Interpolation (r_m/r_M))

Bei Verwendung des gleichen Rechenbeispiels (Zinssatzgruppe 5/6/8//6) wie zuvor ergeben sich hier die folgenden zum Interpolationsverfahren von NV1 völlig analogen

Verfahrensschritte:

1) D_e-Bestimmung

Aus $r_{e1} (= r_m) = 0,05$ und $r_{e2} (= r_M) = 0,08$
folgt $D_e = r_{e2} - r_{e1} = 0,08 - 0,05 = 0,03$.

2a) P₀₁-Bestimmung

Der zu $r_e = r_{e1} = 0,05$ beim konstanten Couponsatz
 $r_o = 0,06$ gehörige Kurs $P_{01}^{(3)}$ hat gemäß der Kursgleichung
(für die gequerte Kursgröße)

$$P_{01}^{(3)} = \frac{1 + 0,06 \left[(1 + r_{e1})^3 - 1 \right] : r_{e1}}{(1 + r_{e1})^3} \quad \text{den Wert}$$
$$\frac{1 + 0,06 \left[(1,05^3 - 1) \right] : 0,05}{1,05^3} = 1,0272324.$$

2b) P₀₂-Bestimmung

Der zu $r_e (= r_{e2}) = 0,08$ beim konstanten Couponsatz
 $r_o = 0,06$ gehörige Kurs $P_{02}^{(3)}$ (gequerte Kursgröße)
hat gemäß der Kursgleichung

$$P_{02}^{(3)} = \frac{1 + 0,06 \left[(1 + r_{e2})^3 - 1 \right] : r_{e2}}{(1 + r_{e2})^3} \quad \text{den Wert}$$
$$\frac{1 + 0,06 \left[(1,08^3 - 1) \right] : 0,08}{1,08^3} = 0,948458,$$

also ist die Differenz $D_p = 0,0787744$.

3) V_{e/p}-Bestimmung

Aus der Definitionsgleichung für $V_{e/p}$, nämlich
 $V_{e/p} = D_e : D_p$ findet man für $V_{e/p}$ den Wert

$$V_{e/p} = \frac{0,03}{0,0787744} = 0,3808343.$$

4) D_{pl} (D_{el})-Bestimmung

Die Kurs-Teildifferenz D_{pl} , die zur Interpolation des gesuchten r_e -Wertes benötigt wird, ist

$$D_{pl} = 0,9928854 - 0,948458 = 0,0444274,$$

womit man für die zugehörige D_{el} -Teildifferenz den Wert

$$D_{el} = D_{pl} \cdot V_{e/p} = 0,0130805$$

erhält.

5) r_e -Bestimmung (lineare Interpolation)

$$r_{e(I)} = r_{el} + D_{el} = 0,05 + 0,0130805 = 0,0630805$$

6) Fehlerrechnung

Der Unterschied zwischen dem Sollwert $r_{e(S)} = 0,0626748$

und dem obigen Interpolationswert $0,0630805$ beträgt

$D(NV2) = 0,0004057$, verglichen mit dem Fehler beim

Näherungsverfahren $NV1$, nämlich $D(NV1) = 4 \cdot 10^{-7}$,

eine sehr starke Abweichung, die eine weitere

P_0/r_e -Interpolation mit verkleinertem Ausgangsintervall notwendig macht.

Verwendet man zur Berechnung des nächsten Näherungswertes für r_e als Ausgangsintervall der P_0/r_e -Interpolation

statt des Intervalles (r_n/r_M) das ganz innerhalb dieses

Intervalles und auch innerhalb des sinnvollen r_e -Wert-

bereiches liegende Intervall (r_{eo}/r_g) , so ergibt sich

eine völlige Analogie zum Näherungsverfahren $NV1a$, das ja auch - wie beschrieben - als Fortsetzung des Näherungsverfahrens $NV1$ durch Verfeinerung der Intervalleinteilung aufgefaßt werden kann.

Wegen dieser Entsprechung soll das nachfolgend skizzierte

Näherungsverfahren mit NV2a bezeichnet werden.

f) P_o/r_e -Interpolation bei Verkürzung des Ausgangsintervalles
(Näherungsverfahren NV2a und NV2a*)

1) D_e -Bestimmung

$$D_e = r_{e2} - r_{e1} = r_g - r_{eo} = 0,0006085$$

Bei der $\overline{P_o^{(3)}}$ -Bestimmung ist wieder zu beachten, daß bei diesem Verfahren wie bei NV2 der Couponsatz r_o während des gesamten Interpolationsverfahrens konstant 0,06 bleibt.

Im Gegensatz dazu gilt beim Näherungsverfahren NV2a* die Gleichung $r_o \overline{P_o^{(n)}} = r_o \overline{P_o^{(n)}}$

nicht nur beim Zielwert $r_o = 0,06$ exakt, sondern für beliebige r_o -Werte.

2a) $\overline{P_{o1}}$ -Bestimmung

Zum Effektivzinssatz $r_{e1} = r_{eo} = 0,0626519$ gehört beim konstanten Couponsatz $r_o = 0,06$ der Kurs (gequerte Größe)

$$\begin{aligned} \overline{P_{o1}^{(3)}} &= \frac{1 + 0,06 \left(1,0626519^3 - 1 \right) : 0,0626519}{1,0626519^3} \\ &= 0,992946. \end{aligned}$$

2b) $\overline{P_{o2}}$ -Bestimmung

Zum Effektivzinssatz $r_{e2} = r_g = 0,0632604$ gehört beim Couponsatz $r_o = 0,06$ gemäß der Kursgleichung

$$\overline{P_{o2}^{(3)}} = \frac{1 + r_o \left[(1+r_{e2})^3 - 1 \right] : r_{e2}}{(1+r_{e2})^3}$$

der Kurs

$$\begin{aligned} \overline{P_{O2}^{(3)}} &= \frac{1 + 0,06 (1,0632604^3 - 1) : 0,0632604}{1,0632604^3} \\ &= 0,9913371 \end{aligned}$$

3) $V_{e/P}$ -Bestimmung

Aus der Kursdifferenz

$$D_P = \overline{P_{O2}^{(3)}} - \overline{P_{O1}^{(3)}} = 0,9913371 - 0,992946 = (-)0,0016089$$

und der Effektivzinssatzdifferenz $D_e = 0,0006085$ ergibt sich für $V_{e/P} = D_e : D_P$ der Wert $\frac{0,0006085}{(-)0,0016089} = (-)0,3782087$.

4) $D_{Pl} (D_{el})$ -Bestimmung

Die Teildifferenz $D_{Pl} = \overline{P_O^{(3)}} - \overline{P_{O1}^{(3)}}$, wo

$$\overline{P_O^{(3)}} = \overline{P_O^{(3)}} = 0,9928854 \text{ ist, hat den Wert}$$

$$D_{Pl} = 0,9928854 - 0,992946 = (-) 0,0000606.$$

Daraus folgt für D_{el} wegen $D_{el} = D_{Pl} \cdot V_{e/P}$ der Wert $(-) 0,0000606 \cdot (-) 0,3782087 = 0,0000229$.

5) r_e -Bestimmung

$$r_{e(I)} = r_{el} + D_{el} = 0,0626519 + 0,0000229 = 0,0626748$$

6) Fehlerrechnung

Der soeben errechnete $r_{e(I)}$ -Wert stimmt mit dem Sollwert genau überein.

Das Näherungsverfahren NV2a* entspricht dem Näherungsverfahren NV1a* mit dem einzigen Unterschied, daß an die Stelle der x_O/r_e -Interpolation die P_O/r_e -Interpolation tritt. Dabei wird als Ausgangsintervall wie bei NV2a, NV1a und NV1a* das Intervall (r_{eO} / r_g) gewählt.

Da bei diesem Interpolationsverfahren wie bei NV1a* wie von Anfang an von der Gleichheit von gequerten und ungequerten Kursgrößen, also von der Gleichung

$$r_o p_o^{(n)} = r_o p_o^{(n)} \quad \text{ausgegangen wird, enthält die resul-}$$

tierende r_e/r_o -Gleichung den eliminierten Kurs nicht; sie ist also zwar für das Verfahren NV1a*, nicht aber für das analoge Verfahren NV2a* geeignet. Stattdessen ist beim Verfahren NV2a* der Couponsatz r_o zu eliminieren, wobei die Gleichsetzung der beiden Kursgrößen (gequerte und ungequerte) dadurch zum Ausdruck gebracht werden soll, daß die Querung wegfällt und lediglich von dem Kurs $r_o p_o^{(n)}$, im obigen Beispiel also

$$r_o p_o^{(3)} = \frac{1 + r_o \cdot 3,2248}{1,20204} \quad \text{gesprochen wird bzw. vom dazu}$$

$$\text{gehörigen Couponsatz} \quad r_o = \frac{r_o p_o^{(3)} \cdot 1,20204 - 1}{3,2248} .$$

Setzt man diesen Couponsatz r_o in die Gleichung

$$r_o p_o^{(3)} = \frac{1 + r_o [(1+r_e)^3 - 1] : r_e}{(1+r_e)^3}$$

ein, so erhält man eine r_e/p_o -Gleichung, aus der man die einander zugehörigen r_e - und p_o -Werte durch "Einsetzen" der einen Größe und "Auflösen" nach der anderen ermitteln kann.

Hier entspricht nun dem r_e -Wert $r_{e2}(=r_g) = 0,0632604$ tatsächlich der (zum r_o -Wert $r_o = 0$ gehörige)

Kurs $0,831919$ und dem r_e -Wert $r_{e1}(=r_{eo}) = 0,0686519$

(der zum r_o -Wert $r_o = r_{oe} = 0,0626519$ gehört) tatsächlich der Kurs 1 .

NV2a*:

Daraus ergeben sich die folgenden fünf (bzw. sechs) Verfahrensschritte:

- 1) $D_e = r_{e2} - r_{e1} = r_g - r_{eo} = 0,0632604 - 0,0626519 = 0,0006085$
- 2a) $P_{o1}^{(3)} = 1$ (das Querungszeichen wurde wegen $P_o = \overline{P_o}$ fortgelassen)
- 2b) $P_{o2}^{(3)} = 0,831919$ (das Querungszeichen wurde wegen $P_o = \overline{P_o}$ fortgelassen)
- 3) $V_{e/P} = \frac{0,0006085}{0,831919-1} = (-) 0,0036202$
- 4) $D_{P1} = 0,9928854 - 1 = (-) 0,0071146$
 $D_{e1} = (-) 0,0071146 \cdot (-) 0,0036202 = 0,0000257$
- 5) $r_{e(I)} = r_{e1} + D_{e1} = 0,0626519 + 0,0000257 = 0,0626776$
- 6) $D(NV2a*) = r_{e(S)} - r_{e(I)} = 0,0000028 = 28 \cdot 10^{-7}$

Außer den obigen auf Interpolation r_o/r_e - bzw. P_o/r_e -Interpolation) beruhenden Näherungsverfahren sollen im folgenden noch zwei weitere davon völlig verschiedene Näherungsverfahren behandelt werden.

Bestimmungsverfahren ohne Verwendung der linearen Interpolation

- a) Näherungsverfahren zur Bestimmung von r_e mit Hilfe der r_o -freien Kurskomponente (Näherungsverfahren NV3)

Formt man die Bestimmungsgleichung für r_e , nämlich

$P_o^{(n)} = \overline{P_o^{(n)}}$, in ausführlicher Schreibweise

$$1+r_o \left[1 + (1+r_n) + (1+r_n)(1+r_{n-1}) + \dots + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots (1+r_2) \right] \\ = \frac{1+r_o \left[(1+r_e)^n - 1 \right]}{(1+r_e)^n} : r_e$$

so um, daß jeweils die Glieder von $P_o^{(n)}$ bzw. $\overline{P_o^{(n)}}$, die den Faktor r_o nicht enthalten, mit dem Zweitindex 1,

diejenigen, die ihn enthalten, mit dem Zweitindex 2 bezeichnet werden, so erhält man für

$P_{01}^{(n)}$ (bzw. $\overline{P_{01}^{(n)}}$) und für $P_{02}^{(n)}$ (bzw. $\overline{P_{02}^{(n)}}$)

folgende einander entsprechende Ausdrücke:

$$P_{01}^{(n)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+r_i)} \quad \text{entspricht} \quad \overline{P_{01}^{(n)}} = \frac{1}{(1+r_e)^n},$$

$$P_{02}^{(n)} = \frac{r_o \cdot \left[1 + (1+r_n) + \dots + (1+r_n)(1+r_{n-1}) \dots (1+r_2) \right]}{\prod_{i=1}^n (1+r_i)}$$

entspricht

$$\overline{P_{02}^{(n)}} = \frac{r_o}{r_e} \cdot \frac{(1+r_e)^n - 1}{(1+r_e)^n} = \frac{r_o}{r_e} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r_e)^n} \right).$$

Für kurze Laufzeiten (kleine n-Werte) ist dabei $P_{01}^{(n)}$ groß gegen $P_{02}^{(n)}$ bzw. $\overline{P_{01}^{(n)}}$ groß gegen $\overline{P_{02}^{(n)}}$, da der Faktor r_o , wenn man annimmt, daß der Couponsatz r_o einen etwa zwischen 1% und 10% liegenden Zahlenwert besitzt, größenordnungsmäßig nur 1/100 bzw. 1/10 der Zahl 1 ausmacht, die man als den die Größenordnung bestimmenden Faktor von P_{01} bzw. $\overline{P_{01}}$ auffassen kann.

Für lange Laufzeiten (große n-Werte) gilt umgekehrt, daß die Bedeutung der jeweils ersten Glieder (r_o -freien Glieder) von $P_{01}^{(n)}$ bzw. $\overline{P_{01}^{(n)}}$ in dem Maße geringer wird, in der die Laufzeit n wächst, da das Hinzutreten eines jeden weiteren Faktors $\frac{1}{1+r_i}$ ($r_i > 0$ wurde vorausgesetzt) bzw. des Faktors $\frac{1}{1+r_e}$ zu einer Verkleinerung von $P_{01}^{(n)}$ bzw. $\overline{P_{01}^{(n)}}$ führt.

Für $n \rightarrow \infty$, d.h. für Konsols, wird dann $P_{01}^{(n)}$ bzw. $\overline{P_{01}^{(n)}}$ gleich Null, während der Bruch $\left[(1+r_e)^n - 1 \right] : (1+r_e)^n$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert, also $\overline{P_{0,\infty}} = \frac{1}{r_e} \cdot \frac{r_0}{r_e}$ wird.

Für das obige Drei-Perioden-Beispiel, d.h. für die Zinssatzgruppe (5/6/8//6), ergeben sich folgende drei charakteristischen Zahlenverhältnisse

$P_{01} : P_0 : P_{02} : P_0 : P_{01} : P_{02}$ der ungequerten und drei entsprechende Zahlenverhältnisse der zugehörigen gequerten Kurse bzw. Kurskomponenten.

Bestimmt man zunächst die Kurskomponenten P_{01} und P_{02} bzw. $\overline{P_{01}}$ und $\overline{P_{02}}$, so ergeben sich dafür folgende Werte

$$P_{01} = \frac{1}{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} = \frac{1}{1,20204} = 0,831919$$

$$P_{02} = \frac{0,06 \cdot 3,2248}{1,20204} = 0,1609663$$

$$(\text{oder } P_{02} = P_0 - P_{01} = 0,9928854 - 0,831919 = 0,1609664)$$

$$\overline{P_{01}} = \frac{1}{(1+r_e)^3} = \frac{1}{1,0626748^3} = \frac{1}{1,2000549} = 0,8332952$$

$$(\text{d.h. } \overline{P_{01}} = P_{01} + 0,0013762)$$

$$\overline{P_{02}} = \frac{0,06 \cdot 0,2000549}{0,0626748 \cdot 1,2000549} = 0,1595902$$

(d.h. $\overline{P_{02}} = P_{02} - 0,0013761$), wo für $\overline{P_{02}}$ wegen $\overline{P_0} = \overline{P_{01}} + \overline{P_{02}}$ auch $\overline{P_{02}} = \overline{P_0} - \overline{P_{01}} = 0,9928854 - 0,8332952 = 0,1595902$ geschrieben werden kann..

$$\begin{aligned} 1) \overline{P_{0,\infty}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{P_{01}^{(n)}} + \overline{P_{02}^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{P_{01}^{(n)}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{P_{02}^{(n)}} = \\ &= 0 + \frac{r_0}{r_e} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+r_e)^n} \right) = \frac{r_0}{r_e} \end{aligned}$$

Daraus folgt $V_{1/0} = P_{01} : P_0 = 0,831919 : 0,9928854$
 Def. $= 0,8378802 : 1$

$V_{2/0} = P_{02} : P_0 = 0,1609664 : 0,9928854$
 Def. $= 0,1621198 : 1$

(oder $1 - \frac{P_{01}}{P_0} = 1 - 0,8378802 = 0,1621198$)

$V_{1/2} = P_{01} : P_{02} = 0,831919 : 0,1609663$
 Def. $= 5,1682791 : 1$

bzw.

$\overline{V}_{1/0} = \overline{P}_{01} : \overline{P}_0 = 0,8332952 : 0,9928854$
 Def. $= 0,8392662 : 1$

$\overline{V}_{2/0} = \overline{P}_{02} : \overline{P}_0 = 0,1595902 : 0,9928854$
 Def. $= 1,607337 : 1$

$\overline{V}_{1/2} = \overline{P}_{01} : \overline{P}_{02} = 0,8392662 : 0,1607337$
 Def. $= 5,22147 : 1$

Bei diesem¹⁾ Beispiel ist also die r_0 -freie Komponente auf der linken Seite etwa $5 \frac{1}{6}$ mal so groß wie die r_0 enthaltende; auf der rechten Seite²⁾ ist das Verhältnis wegen der ausgleichenden Wirkung des Effektivzinssatzes einerseits und der Nicht-Angepaßtheit des Couponsatzes gegenüber den Einperiodenterminzinssätzen (6% gegenüber 6,26519%) andererseits mit $5,22 : 1$ etwas größer.

NV3:

Nimmt man nun an, daß etwa das Verhältnis $\overline{V}_{1/0}$ bekannt ist, so vereinfacht sich die Bestimmung des r_e -Wertes mit Hilfe der Gleichung $P_0 = \overline{P}_0$ insofern, als durch die gegebene Zinssatzgruppe (d.i. die gegebene Zinssatzfolge einschließlich des gegebenen Couponsatzes) der Kurs P_0 eindeutig bestimmt ist und somit auch das r_0 -freie Glied von $\overline{P}_0$, denn

$$\overline{P}_{01} : \overline{P}_0 = \overline{P}_{01} : P_0, \text{ wegen } \overline{P}_0 = P_0$$

und dieser Quotient ist gleich dem als bekannt ange-

1) Beispiel von Lutz mit der Zinssatzfolge (5/6/8) und dem Couponsatz 6(%)

2) von $P_0^{(3)} = P_0^{(3)}$

nommenen Verhältnis $\overline{V}_{1/0}$, also ist

$$\overline{P}_{01} = P_0 \cdot \overline{V}_{1/0}.$$

Da der Reziprokwert von $\overline{P}_{01}$ definitionsgemäß als r_0 -freies Glied eine reine Potenz von $(1 + r_e)$, nämlich $(1 + r_e)^n$ ist, erhält man $(1 + r_e)$ als n-te Wurzel aus diesem Reziprokwert.

Für die Zinssatzgruppe (5/6/8//6) ist z.B.

$$P_0 = \frac{1 + 0,06 \cdot 3,2248}{1,20204} = 0,9928854.$$

Mit $\overline{V}_{1/0} = 0,8392662^{(1)}$ ergibt sich daraus für $\overline{P}_{01}$ der Wert

$$\begin{aligned}\overline{P}_{01} &= P_0 \cdot \overline{V}_{1/0} = 0,9928854 \cdot 0,8392662 \\ &= 0,8332951, \text{ und für}\end{aligned}$$

$$(1 + r_e)^3 = \frac{1}{\overline{P}_{01}} = \frac{1}{0,8332951}, \text{ also für}$$

$$1 + r_e = \sqrt[3]{\frac{1}{0,8332951}} = \sqrt[3]{1,200055}$$

$$= 1,0626748.$$

Kennt man das Verhältnis $\overline{V}_{1/0}$ nur "ungefähr", was dann der Fall ist, wenn nur Näherungswerte von r_e bekannt sind, so weichen die mit Hilfe dieser Näherungswerte gebildeten Verhältnisse $\overline{V}_{1/0}^*$, $\overline{V}_{2/0}^*$, $\overline{V}_{1/2}^*$ jeweils etwas von den richtigen Verhältniswerten $\overline{V}_{1/0}$, $\overline{V}_{2/0}$, $\overline{V}_{1/2}$ ab, jedoch ist die Abweichung umso geringer, je besser der ursprüngliche Näherungswert für r_e war.

Beispiel 1:

Z.B. erhält man für $r_e = 0,0632604$ als Näherungswert für r_e den $\overline{V}_{1/0}^*$ -Wert

$$\overline{V}_{1/0}^* = \overline{P}_{01}^* : \overline{P}_0^* = \frac{1}{1,0632604^3} : 0,9913371$$

1) Der Wert von $\overline{V}_{1/0} = \overline{P}_{01} : \overline{P}_0$ ergibt sich aus dem hier als bekannt angenommenen Sollwert für r_e , nämlich $r_e = 0,0626748$, als Quotient

$$\begin{aligned}& \frac{1}{1,0626748^3} : \frac{1 + 0,06 \cdot (1,0626748^3 - 1)}{1,0626748^3} \\ &= \frac{1}{1 + 0,06 \cdot 0,2000549 : 0,0626748} = \frac{1}{1,191517} = 0,8392662\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}\overline{P_o}^* &= \overline{P_o}(r_e=r_g) = \frac{1+0,06(1,0632604^3-1) : 0,0632604}{1,0632604^3} \\ &= \frac{1+0,06 : 0,20204 : 0,0632604}{1,20204} \\ &= 0,9913371 \text{ ist.}\end{aligned}$$

Setzt man in den obigen Quotienten $\frac{1}{1,0632604^3} : 0,9913371$ für 0,9913371 den Ausdruck

$$\frac{1+0,06 : 0,20204 : 0,0632604}{1,20204}$$

ein, so vereinfacht sich der Ausdruck für $\overline{V_{1/o}}^*$ zu

$$\begin{aligned}\overline{V_{1/o}}^* &= \frac{1}{1 + 0,06 : 0,20204 : 0,0632604} \\ &= \frac{1}{1,1916269} = 0,8391888.\end{aligned}$$

Beispiel 2:

Nimmt man als Näherungswert für r_g den Wert

$r_g = r_{g0} = 0,0626519$ an, so erhält man für $\overline{V_{1/o}}^*$ den folgenden Zahlenwert:

$$\begin{aligned}\overline{V_{1/o}}^* &= \frac{1}{1,0626519^3} : \frac{1+0,06(1,0626519^3-1) : 0,0626519}{1,0626519^3} \\ &= \frac{1}{1+0,06 \cdot 0,1999773 : 0,0626519} = \frac{1}{1,1915127} = 0,8392692\end{aligned}$$

Man sieht, daß der $\overline{V_{1/o}}^*$ -Wert des 2. Beispiels, nämlich 0,8392692, vom "richtigen" $\overline{V_{1/o}}$ -Wert 0,8392662 sich um $30 \cdot 10^{-7}$ unterscheidet, dagegen ist der Fehler des $\overline{V_{1/o}}^*$ -wertes gegenüber dem $\overline{V_{1/o}}$ -Wert im 1. Beispiel $0,8391888 - 0,8392662 = (-) 774 \cdot 10^{-7}$.

Bezeichnet man den ursprünglichen (Ausgangs-)Näherungswert von r_e mit r_{No} (0-te Näherung) und die weiteren Näherungswerte mit r_{N1} , r_{N2} , r_{N3} usw., so ergeben sich bei der gleichen Zinsatzgruppe wie in den vorhergehenden Beispielen, also (5/6/8) für r_{Ni} ($i=0,1,2,\dots$) folgende Ausdrücke:

NV3:

Ausgangswert $r_{No} (= r_g) = 0,0632604$

1) $\overline{V_{1/o}}$ -Bestimmung

Aus dem Beispiel 1 läßt sich der zum Näherungswert

$r_{No} = 0,0632604$ gehörige $\overline{V_{1/o}}$ -Wert

$$\begin{aligned}\overline{V_{1/o}}^* &= \frac{1}{1+0,06 \cdot 0,20204 : 0,0632604} \\ &= 0,8391888\end{aligned}$$

entnehmen.

2) $\overline{P_{01}}$ -Bestimmung

Aus $\overline{P_0}^* = \overline{P_0} = P_0 = 0,9928854$ und $\overline{V_{1/o}}^* = 0,8391888$

folgt

$$\overline{P_{01}}^* = \overline{V_{1/o}}^* \cdot 0,9928854 = 0,8332183.$$

3) r_{N1} -Bestimmung

Für $(1 + r_{N1})$ erhält man dann durch Ersetzung von r_e in $(1 + r_e)$ durch r_{N1}

$$1+r_{N1} = \sqrt[3]{\frac{1}{\overline{P_{01}}^*}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0,8332183}}$$

$$\text{also} \quad = \sqrt[3]{1,2001656} = 1,0627075.$$

4) Fehlerabschätzung

Der daraus resultierende Näherungswert, nämlich

$r_{N1} = 0,0627075$ weicht vom Sollwert $r_e^{(s)} = 0,0626748$ um

$D(NV3) = 327 \cdot 10^{-7}$ ab. Durch Einsetzen von r_{N1} anstelle von r_{No} läßt sich der Näherungswert von r_e verbessern.

Bezeichnet man den nächsten Schritt dieses Verfahrens (Benutzung des besseren Näherungswertes r_{N1} statt r_{No}) mit NV3a, so ergibt sich der nächste Näherungswert r_{N2} in folgenden 3 (bzw. 4) Schritten.

1) $\overline{V}_{1/o}$ -Bestimmung

Mit r_{N1} statt r_{No} ($= r_g$) erhält man für $\overline{P}_o$ bzw. $\overline{P}_{ol}$ die verbesserten Näherungswerte

$$\overline{P}_o^{**} = \overline{P}_o(r_e=r_{N1}) = \frac{1+0,06(1,0627075^3-1)}{1,0627075^3} : 0,0627075$$

und für

$$\overline{P}_{ol}^{**} = \overline{P}_{ol}(r_e=r_{N1}) = \frac{1}{1,0627075^3} ,$$

womit das Verhältnis $\overline{V}_{1/o}^{**}$
den Wert

$$\frac{1}{1+0,06 \cdot 0,2001656 : 0,0627075} = 0,8392619$$

annimmt, der sich vom Sollwert $0,8392662$ um $43 \cdot 10^{-7}$ unterscheidet.

2) $\overline{P}_{ol}$ -Bestimmung

$\overline{V}_{1/o}^{**}$ liefert, mit dem richtigen Kurs $p_o^{(3)} = 0,9928854$ multipliziert, als zweiten Näherungswert für $\overline{P}_{ol}$ den Ausdruck

$$\overline{P}_{ol}^{**} = 0,9928854 \cdot 0,8392619 = 0,8332908.$$

3) r_{N2} -Bestimmung

Aus $\overline{P}_{ol}^{**} = \frac{1}{(1+r_{N2})^3}$ ergibt sich für $1+r_{N2}$ der Wert

$$1 + r_{N2} = \sqrt[3]{1 : 0,8332908} = \sqrt[3]{1,2000612} = 1,0626788.$$

$$r_{N2} = 0,0626788$$

4) Fehlerabschätzung

Dieser zweite Näherungswert weicht vom Sollwert $r_e = 0,0626748$ nur noch um $2 \cdot 10^{-6}$ ab.
(s)

- b) Näherungsverfahren zur Bestimmung von r_e mittels rekursiver partieller Substitution (NV4, NV4* und NV4a)

Die rechte Seite der Gleichung $p_o^{(n)} = \overline{p_o^{(n)}}$ - auf das Beispiel $(5/6/8//r_o)$ bezogen -

$$\frac{1 + r_o \cdot 3,2248}{1,20204} = \frac{1 + r_o \cdot [(1+r_e)^3 - 1] : r_e}{(1 + r_e)^3}$$

läßt sich in die Form

$$\overline{p_o^{(3)}} = \frac{1}{(1 + r_e)^3} + \frac{r_o}{r_e} \left(1 - \frac{1}{(1 + r_e)^3} \right) \quad \text{bzw.}$$

$$\overline{p_o^{(3)}} = \frac{r_o}{r_e} + \frac{1 - \frac{r_o}{r_e}}{(1+r_e)^3}$$

umschreiben, allgemein läßt sich die rechte Seite der Gleichung

$$\overline{p_o^{(n)}} = \frac{1 + r_o \cdot [(1+r_e)^n - 1] : r_e}{(1 + r_e)^n}$$

in die Form

$$\frac{r_o}{r_e} + \left(1 - \frac{r_o}{r_e} \right) : (1 + r_e)^n$$

bringen.

Daraus erkennt man, daß der Effektivzinssatz r_e außer im Quotienten $\frac{r_o}{r_e}$ noch im binomischen Ausdruck des Nenner^s des zweiten Summanden $(1 + r_e)^n$ auftritt. Es liegt daher nahe, diese gemischte Bestimmungsgleichung, die sowohl Potenzen von r_e vom 1. Grade sowie Potenzen von $(1 + r_e)$ vom n-ten Grade enthält, zu vereinfachen. Entweder dadurch, daß man nur das r_e im Nenner des Quotienten $\frac{r_o}{r_e}$ durch einen bereits bekannten oder berechneten r_e -Näherungswert niedrigerer, etwa i-ter Stufe ersetzt, um dann aus der nur noch den Ausdruck $(1 + r_e)^n$ enthaltenden neuen Gleichung für r_e dieses r_e als nächsten, also (i+1)-ten Näherungswert $r_{N,i+1}$ zu

ermitteln, oder dadurch, daß man nur das r_e des Binoms, d.h. das r_e in $(1 + r_e)$ durch r_{Ni} ersetzt, und das r_e in $\frac{r_o}{r_e}$ als $r_{N,i+1}$ errechnet.

Beide Verfahren kann man als partielle rekursive Substitutionsverfahren bezeichnen.

Es zeigt sich aber, was hier nicht bewiesen werden wird, daß nur die letztere Art der Substitution (partielle Substitution des r_e im Binom), die zu einer linearen Bestimmungsgleichung in $\frac{r_o}{r_e}$ führt, woraus sich r_e selbst durch einfache Reziprokwertbildung ermitteln läßt, immer bessere (r_{Ni} -) Näherungswerte für r_e liefert.

Eine weitere Möglichkeit, zu einer linearen Bestimmungsgleichung für einen Näherungswert von r_e zu kommen, besteht darin, nur im 1. Quotienten $\frac{r_o}{r_e}$ das r_e als neu

zu bestimmenden Näherungswert $r_{N,i+1}$ zu betrachten und alle anderen r_e durch (den als bekannt vorausgesetzten Näherungswert der vorhergehenden Stufe) $r_{N,i}$ zu ersetzen (NV4*).

Als Beispiel¹⁾ wird wieder die Zinssatzgruppe (5/6/8//6) benutzt.

NV4:

1) Substitution von r_e durch $r_{N,i}$ im Binom

Setzt man im binomischen Ausdruck $(1+r_e)^3$ für r_e den Näherungswert r_{Ni} ein, so erhält man folgende lineare Bestimmungsgleichung für den Quotienten $\frac{r_o}{r_e}$ bzw. $\frac{r_o}{r_{N,i+1}}$

$$0,9928854 = \frac{0,06}{r_{N,i+1}} + (1 - \frac{0,06}{r_{N,i+1}}) : (1+r_{Ni})^3 .$$

1) Zuerst für NV4, dann für NV4a

2) Bestimmung von $\frac{r_o}{r_e} \left(= \frac{r_o}{r_{N,i+1}} \right)$

Als nullter (Ausgangs-)Näherungswert für r_e , also als r_{Ni} mit $i=0$, möge der r_g -Wert $0,0632604 = r_{No}$ dienen.

Für $(1+r_e)^3$ ergibt sich dann der Wert

$$(1+r_{No})^3 = 1,0632604^3 = 1,20204. \text{ Mit } 1,20204 \text{ f. } (1+r_e)$$

erhält man für r_{N1} , wenn man r_{N1} statt r_e im Quotienten $0,06 : r_e$ einsetzt, die in $\frac{0,06}{r_{N1}}$ lineare Bestimmungsgleichung

$$0,9928854 = \frac{0,06}{r_{N1}} + (1 - \frac{0,06}{r_{N1}}) : 1,20204.$$

3) Bestimmung von $r_e = r_{N,i+1}$

Aus dieser Gleichung für $\frac{0,06}{r_{N1}}$ läßt sich r_{N1} in zwei einfachen Schritten, nämlich (Auflösung nach $\frac{r_o}{r_e}$)

$$\frac{0,06}{r_{N1}} = \frac{0,9928854 \cdot 1,20204 - 1}{0,20204} = 0,9576712$$

und $0,06 : r_{N1} = 0,9576712$, also (Reziprokwertbildung)

$$r_{N1} = 0,06 : 0,9576712 = 0,0626519$$

als nächster Näherungswert für r_e ermitteln.

4) Fehlerabschätzung

Die Übereinstimmung dieses Zahlenwertes mit dem angepaßten Effektivzinssatz $r_{eo} (= r_{oe})$, der zur Zinssatzfolge (5/6/8//6) gehört, ist nur insofern zufällig, als r_g als 0-ter Näherungswert für r_e verwendet worden ist. In diesem Falle aber läßt sich

$$r_{N1} = \frac{0,20204 \cdot 0,06}{0,9928854 \cdot 1,20204 - 1} \text{ durch Einsetzen von}$$

$$0,9928854 = \frac{1 + 0,06 \cdot 3,2248}{1,20204} \text{ zu}$$

$$\begin{aligned} r_{N1} &= \frac{0,20204 \cdot 0,06}{(1 + 0,06 \cdot 3,2248) : 1,20204 - 1} \\ &= \frac{0,20204 \cdot 0,06}{0,06 \cdot 3,2248} = \frac{0,20204}{3,2248} \text{ umformen.} \end{aligned}$$

Der letzte Quotient ist aber wegen $r_{eo} = r_{oe} = \frac{1,20204 - 1}{3,2248}$ mit r_{eo} identisch.

Bezeichnet man mit NV4a den nächsten Schritt im Verfahren NV4, d.h. im Verfahren der partiellen Substitution, so läßt sich der nächste Näherungswert (r_{N2}) durch Einsetzung des soeben errechneten Näherungswertes

$r_{N1} = 0,0626519$ anstelle von r_e in das Binom $(1+r_e)^3$ der Ausgangsgleichung und gleichzeitige Ersetzung des r_e im Quotienten $\frac{r_o}{r_e}$ durch den folgenden Näherungswert

mittels der Gleichung

$$\begin{aligned} 0,9928854 &= \frac{0,06}{r_{N2}} + (1 - \frac{0,06}{r_{N2}}) : (1 + r_{N1})^3 \\ &= \frac{0,06}{r_{N2}} + (1 - \frac{0,06}{r_{N2}}) : 1,1999773 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{1,1999773 \cdot 0,9928854 - 1}{0,06} = \frac{0,1999773}{r_{N2}}$$

bestimmen.

Er hat den Zahlenwert von $r_{N2} = 0,0626757$ und weicht vom Sollwert $r_e = 0,0626748$ nur um $9 \cdot 10^{-7}$ ab.

Das Näherungsverfahren NV4 besteht in der (partiellen) Substitution des r_e im Binom $(1+r_e)^n$ durch r_{Ni} ,

das Verfahren NV4a beruht dagegen auf der Substitution aller r_e außer dem r_e des ersten Quotienten, das das gesuchte $r_{N,i+1}$ darstellt, also aller r_e im zweiten Summanden $(1 - \frac{r_o}{r_e}) : (1 + r_e)^n$ von $p_o^{(n)}$ durch r_{Ni} .

Durch diese Substitution ($r_e = r_{Ni}$) im zweiten Summanden und durch die Umbenennung des Nenners r_e des ersten Summanden in $r_{N,i+1}$ erhält man wieder eine lineare Gleichung in $r_{N,i+1}$. Doch erhält man durch diese partielle Substitution des r_e durch r_{Ni} weit schlechtere Näherungswerte für das verbleibende $r_e = r_{N,i+1}$.

Die Gleichung

$$0,9928854 = \frac{0,06}{r_{N1}} + (1 - \frac{0,06}{r_{No}}) : (1 + r_{No})^3$$

geht mit $r_{No} = 0,0632604$ in die Bestimmungsgleichung

$$0,9928854 = \frac{0,06}{r_{N1}} + \frac{0,0032604}{0,0632604} : 1,20204 \quad \text{für}$$

r_{N1} über.

Auflösung der letzten Gleichung nach r_{N1} liefert:

$$r_{N1} = \frac{0,06 \cdot 0,0632604 \cdot 1,20204}{0,9928854 \cdot 1,20204 \cdot 0,0632604 - 0,0032604} = \frac{0,0045624}{0,0722401}$$

also $r_{N1} = 0,063156$.

Setzt man statt r_{No} in der Gleichung $0,9928854 = \overline{p_o^{(2)}}$ partiell (d.h. bis auf den Nenner des 1. Summanden) für r_e den "neuen" Näherungswert r_{N1} ein, so erhält man als nächsten Näherungswert r_{N2} , also für den Nenner des 1. Summanden, aus

$$0,9928854 = \frac{0,06}{r_{N2}} + \frac{0,003156}{0,063156} : 1,2016858$$

den Wert

$$r_{N2} = 0,0630715.$$

Fehlerabschätzung und Fehlervergleich

Eine Gegenüberstellung der r_{Ni} -Wertfolgen im Falle NV4 und NV4* macht sofort den großen Unterschied in der Güte der jeweils erreichten Annäherung (an den gesuchten Effektivzinssatz $r_e = 0,0626748$) deutlich.

NV4		$r_{No} (=r_g) = 0,0632604$		$r_{N1} = 0,0626519$		$r_{N2} = 0,0626757$
NV4*		" " 0,0632604		" 0,0631560		" 0,0630715

Beim Näherungsverfahren NV4 reichen also 2 Näherungs-

werte für r_e durchaus für eine genügend große Annäherung an den Sollwert (Abweichung $r_{N2} - r_e = 9 \cdot 10^{-7}$) aus, beim NV4*-Verfahren dagegen bei weitem nicht. Letzteres Verfahren ist also praktisch als unbrauchbar zu bezeichnen.

- c) Näherungsverfahren zur Effektivzinssatzbestimmung mit Hilfe des gewichteten harmonischen oder arithmetischen Mittelwertes (NV5)
-

Bei den bisherigen Näherungsverfahren zur r_e -Bestimmung ist von der Tatsache, daß beide Seiten der Bestimmungsgleichung für r_e , nämlich $P_o^{(n)} = P_o^{(n)}$, ähnlich wie beim unmittelbaren Bestimmungsverfahren des Normalintervall-Modells von Malkiel¹⁾ als Bezugsgrößen eines Vergleichs zweier gewogener harmonischer Mittel aufgefaßt werden können, also - um beim Beispiel (5/6/8//6) zu bleiben - von

$$\frac{1}{1,0632604^3} + \frac{0,06}{1,0632604^3} \quad \text{auf der linken Seite und}$$

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{0,06}{[(1+x)^3 x] : [(1+x)^3 - 1]} \quad \text{auf der rechten}$$

Seite, kein Gebrauch gemacht worden. Natürlich kann man hier für die linke Seite entweder den schon mehrfach berechneten, zum Couponsatz 0,06 gehörigen Kurswert 0,9928854 einsetzen oder, um den Zusammenhang mit dem Begriff des harmonischen Mittels klarer herauszustellen, ein harmonisches Zwischenmittel der Form $\frac{1 + 0,06}{(1 + r_{ZM})^3}$ einführen, dem beide Seiten gleich sind.

Z.B. liefert

$$\begin{aligned} 6P_o^{(3)} &= \frac{1}{1,0632604^3} + \frac{0,06}{1,0632604^3} = 3,2248 \\ &= \frac{1 + 0,06}{(1 + r_{ZM})^3} = 0,9928854 \end{aligned}$$

1) Vgl. den Abschnitt "Das Normalintervall-Modell von Malkiel auf S. 257

2) $\frac{0,06 [(1+x)^3 - 1] : x}{(1+x)^3}$ läßt sich zu $\frac{0,06}{(1+x)^3 x : [(1+x)^3 - 1]}$ umformen.

für $(1 + r_{ZM})^3$ den Wert $\sqrt[3]{\frac{1,06}{0,9928854}} = 1,0675955$.

Ein Näherungsverfahren für die Bestimmung von x kann nun die Tatsache benutzen, daß der Zähler des 2. Bruches (0,06) wesentlich kleiner als der Zähler des 1. Bruches (1) ist, die zugehörigen Nenner also unterschiedlich stark gewichtet sind, was auch dann noch gilt, wenn man den Nenner des 2. Bruches nicht mit $r_o = 0,06$, sondern - wie es der ursprünglichen Zerlegung von $P_o^{(n)}$ in eine r_o -freie und in eine r_o -enthaltende Komponente entspricht - den Ausdruck $[(1+x)^n - 1] : x$ wieder mit dem Zähler r_o vereinigt (im obigen Beispiel mit der richtigen Lösung für x ($= 0,0626748$) würde der Zähler des 2. Bruches $0,06 \cdot (1,0626748^3 - 1) : 0,0626748 = 0,1914427$, also nur der 5,2-te Teil des Zählers 1 des 1. Bruches sein. Setzt man nun im Nenner des 1. Bruches $(1+r_e)^n$ von $P_o^{(n)}$ den für r_e besseren Näherungswert r_{N1} ein als im Nenner des 2. Bruches, wo $1+r_e = 1+r_{No}$ gesetzt wird, so erhält man mit der Gleichung

$$\frac{1}{(1 + r_{N1})^3} + \frac{r_o [(1+r_{N1})^3 - 1] : r_{N1}}{(1 + r_{No})^3} = \frac{1+r_o [(1+r_{N1})^3 - 1] : r_{N1}}{(1 + x)^3}$$

eine Näherungsgleichung (für $x = r_{N2}$), die der Aufgabe der sukzessiven Bestimmung von Näherungswerten für r_e im Hinblick auf eine sinnvolle Verwendung des Begriffes "gewogenes harmonisches Mittel" angepaßt ist.

Mit

$$r_{No} = r_g = R_3 = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,08} - 1 = \sqrt[3]{1,20204} - 1 \quad \text{und}$$

$$r_{N1} = r_{eo} = r_{oe} = \frac{0,20204}{3,2248} = 0,0626519 \quad \text{findet man für}$$

$x = r_{N2}$ die Bestimmungsgleichung

$$\frac{1}{1,0626519^3} + \frac{0,06 \cdot 3,191879}{1,0632604^3} = \frac{1}{1,1999773} + \frac{0,1915127}{1,20204} \\ = \frac{1,1915127}{(1+x)^3}$$

oder

$$(1+x)^3 = \frac{1,1999773 \cdot 1,20204 \cdot 1,1915127}{1,20204 + 1,1999773 \cdot 0,1915127} \\ = 1,2003083,$$

$$\text{also } r_{N2} = x = 0,0627496.$$

Ob beim nächsten (zweiten) Schritt dieses Näherungsverfahrens r_{N1} an die Stelle von r_{No} und r_{N2} an die Stelle von r_{N1} des ersten Verfahrensschrittes treten kann, hängt

1. davon ab, ob die zu r_{N1} und r_{N2} zugehörigen Kurse den "richtigen" oder "Soll"-Kurs einschließen oder nicht und

2. ob der zu r_{N2} gehörige Kurs näher am "Soll"-Kurs liegt als der zu r_{N1} gehörige. Wegen der stärkeren Gewichtung des Nenners des 1. Bruches muß diese nämlich den besseren Näherungswert für r_e enthalten.

Zu $r_{N1} = r_{e0} = 0,0626519$ gehört der Kurs

$(1+0,06 \cdot 0,1999773 : 0,0626519) : 1,1999773 = 0,992946$,
ein Kurs, der um 0,0000606 über dem Sollkurs 0,9928854

und zu $r_{N2} = 0,0627496$ gehört der Kurs

$(1+0,06 \cdot 0,2003083 : 0,0627496) : 1,2003083 = 0,9926875$,
ein Kurs, der um 0,0001979 unter dem Sollkurs liegt;

d.h. der Nenner des 1. Bruches bleibt beim nächsten Schritt $1,0626519^3$, da der zu 0,0626519 gehörige Kurs näher am Sollkurs liegt. Mit den obigen Zahlenwerten ergibt sich dann $x = r_{N3}$ der nächsten Näherung aus

$$\frac{1}{1,0626519^3} + \frac{0,06 \cdot 0,199773 : 0,0626519}{1,0627496^3} \\ = \frac{1}{1,1999773} + \frac{0,1915127}{1,2003083} = \frac{1,1915127}{(1+x)^3}.$$

Aus dieser Gleichung findet man für $x = r_{N3}$ den Zahlenwert 0,0626676, der sich vom Sollwert 0,0626748 noch um 0,0000072 unterscheidet. Eine noch bessere Näherung erhält man hier, wenn man den gewogenen arithmetischen Mittelwert aus den beiden letzten Näherungswerten bildet, wobei der schlechtere Näherungswert $r_{N2} = 0,0627496$, dessen Kurs um 0,0000606 vom Sollwert abweicht, während der zu $r_{N3} = 0,0626676$ gehörige Kurs 0,9929045 nur um 0,0000191 davon abweicht, mit dem Gewichtungsfaktor

$$0,06.0,2000305 : 0,0626676 = 0,1915157$$

zu multiplizieren ist

$$(0,0626676 + 0,1915157 \cdot 0,0627496) : 1,1915157 \\ = 0,0626807.$$

Benutzt man statt des Verfahrens der Bildung des gewogenen harmonischen Mittels das wesentlich einfachere Verfahren der Bildung des gewogenen arithmetischen Mittels, wobei man noch den Vorteil hat, daß direkt gemittelt werden kann, weil bei der arithmetischen Mittelwertbildung wie im Abschnitt über Mittelwertbildung gezeigt, die Begriffe direkter und indirekter arithmetischer Mittelwert zusammenfallen, so erhält man mit dem gleichen Bewertungsfaktor wie oben $r_{N2} = (r_{N1} + 0,1914427 \cdot r_{No}) : 1,1914427$

nach Einsetzung der Werte $r_{N1} = 0,0626519$ und

$$r_{No} = 0,0632604 \text{ für}$$

r_{N2} den Wert 0,0627496, also den gleichen Wert, den man auch bei der Bildung des gewogenen harmonischen Mittels erhält.

Durch Fortsetzung des obigen Verfahrens erhält man als nächsten Näherungswert (sowohl bei harmonischer wie bei arithmetischer gewogener Mittelwertbildung $r_{N4} = 0,0626808$ und durch Bildung des (ungewogenen) arithmetischen Mittels aus den beiden letzten Näherungswerten

$(r_{N3} + r_{N4}) : 2$ den Wert 0,0626742, der sich vom Sollwert nur noch um $6 \cdot 10^{-8}$ unterscheidet.

V. Die Zinsstruktur hauptsächlich unter dem Aspekt unterschiedlicher Erwartungen

1. Die Kritik an der klassischen Erwartungstheorie

a) Das Modell von Hicks

Während die klassische Erwartungstheorie davon ausgeht, daß Wertpapiere mit kurzen bzw. langen Restlaufzeiten als perfekte Substitute betrachtet werden können ¹⁾ und daß sich durch entsprechende Transaktionen die zukünftigen Zinssätze den erwarteten Zinssätzen angleichen, ergibt sich der zukünftige Zinssatz bei Hicks als "... a biased estimate of the relevant expected future rate..."²⁾

Dagegen sind nach Hicks Wertpapiere mit kurzen bzw. langen Restlaufzeiten keine vollkommenen Substitute, weil nämlich der Gedanke der Unsicherheit im Sinne einer geringeren Liquidierbarkeit bzw. eines größeren Risikos für Papiere mit längerer Laufzeit zu einer Bevorzugung der Papiere mit kürzeren Laufzeiten führt.

Meiselman stellt fest: "Hicks thus holds that the futures market in loan funds can best be analysed as if it were dominated by the lender's side of the market where lenders are essentially speculators who have risk aversion, and who regard long loans as riskier than short loans."³⁾

Bei Ertragsgleichheit werden Papiere mit kürzerer Laufzeit gegenüber solchen mit längerer Laufzeit bevorzugt.

Das bedeutet, daß man den Besitzern langfristiger Papiere bei gleicher Verzinsung eine zusätzliche Prämie (Liquiditäts- bzw. Risikoprämie) bezahlen muß, damit sie nicht

1) "... short- and long-term securities can be treated as if they were perfect substitutes ..."
Meiselman, D., a.a.O., S. 10

2) ders. a.a.O., S. 12-13

3) ders. a.a.O., S. 14

von langfristigen Papieren in kurzfristige "umsteigen".

Hinsichtlich der Differenzierung zwischen den Begriffen Liquiditätsprämie und Risikoprämie bemerkt Masera¹⁾:

" ... it is a common practice to use indifferently the terms 'risk premia' and 'liquidity premia' to refer to the difference between forward and expected rates."

Hicks selbst hat den Begriff "Risikoprämie" folgendermaßen definiert: "The forward short rate will thus exceed the expected short rate by a risk premium which corresponds exactly to the 'normal backwardation' of the commodity markets"²⁾, was sich auch mit dem von Lutz verwendeten Begriff deckt: "Risk of default, however, will be excluded from the discussion, the only risk considered will be that associated with changes in interest rates."³⁾

Die Bevorzugung von Papieren mit langer Laufzeit (bei den langfristigen Wertpapieren übertrifft das Angebot die Nachfrage, was als "constitutional weakness"⁴⁾ des langfristigen Marktes bezeichnet wird) kommt zum Ausdruck in der Änderung der Formel für den Zusammenhang zwischen den erwarteten und der Terminzinssätzen, d.h. an die Stelle der Gleichung

$$r_{1,t+i,t} = e_{1,t+i,t}$$

der klassischen Erwartungstheorie tritt die Gleichung

$$r_{1,t+i,t} = e_{1,t+i,t} + L_{1,t+i,t} \quad 5)$$

-
- 1) Masera, R.S., The Term Structure of Interest Rates. An Expectations Model Tested on Post War Italian Data. Oxford 1972, S.18
 - 2) Hicks, J.R., Value and Capital, 2. Aufl., Oxford 1946, S. 147
 - 3) Lutz, F.A., The Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 47
 - 4) Hicks, J.R., a.a.O., S. 146
 - 5) Zum besseren Vergleich wird in diesem wie auch im folgenden Abschnitt in der Hauptsache die Symbolik von Faßbender benutzt.

wobei Hicks annimmt, daß

$$L_{1,t+i,t} \quad \text{für} \quad = 1, \dots, n$$

stets größer Null ist, d.h. daß die Liquiditätsprämie stets positiv ist.¹⁾

Die Liquiditätsprämie liegt also - gleichsam wie der "Schaum auf dem Bier" - auf dem kurzfristigen Zinssatz, der mit vergütet werden muß, wenn Kapital langfristig ausgeliehen werden soll.

Hicks nimmt also an, daß, wenn keine positive Liquiditätsprämie vorhanden ist, die Wertpapieranleger ausschließ-lich kurzfristige Wertpapiere erwerben werden. "He suggested that even if short rates are expected to remain unchanged, the forward short rate can normally be expected to exceed the current short rate by a risk premium that must be offered the holder of bond to compensate him for assuming the risks of price fluctuation."²⁾

Bezeichnet man die zur Zeit t geldenden Zinssätze (Zinsstruktur) mit

$$\overline{R}_{1,t} \quad \text{statt mit} \quad R_{1,t},$$

so ergibt sich bei Berücksichtigung von Risikoprämien folgende Zinsstruktur

$$\begin{aligned} \overline{R}_{1,t} &= \left\{ (1 + R_{1,t}) \left[1 + (e_{1,t+1,t} + L_{1,t+1,t}) \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[1 + (e_{1,t+2,t} + L_{1,t+2,t}) \right] \dots \dots \cdot \left. \left[1 + (e_{1,t+i-1,t} + L_{1,t+i-1,t}) \right] \right\}^{\frac{1}{i}} - 1, \quad \text{also} \\ \overline{R}_{i,t} &= \left\{ (1 + R_{1,t}) \dots \dots \cdot \left[1 + r_{1,t+i-1,t} \right] \right\}^{\frac{1}{i}} - 1. \end{aligned}$$

1) "He would only come into the long market, because he expected to gain by so doing, and to gain sufficiently

In der klassischen Erwartungstheorie folgt aus der Forderung $R_{i,t} = \text{const.}$, daß der zur Zeit $t = t + 0$ geltende Einjahreszins $R_{1,t}$ und alle erwarteten (Termin-)Zinssätze einander gleich, und zwar gleich dem Zinssatz $R_{1,t}$ der Zinsstruktur sein müssen. Die Ertragskurve verläuft also parallel zur t-Achse.

Werden dagegen im Modell von Hicks (d.h. bei positiven Risiko- bzw. Liquiditätsprämien) unveränderte Zinssätze erwartet, ist also

$$e_{1,t+i,t} = \text{const.},$$

so muß für die $R_{i,t}$ gelten

$$\overline{R_{1,t}} (= R_{1,t}) < \overline{R_{2,t}} < \overline{R_{3,t}} \dots < \overline{R_{n,t}},$$

d.h. man erhält eine ansteigende Ertragskurve.

Die monoton steigende Folge $\overline{R_{i,t}}$ impliziert eine ebenfalls monoton steigende Folge der $L_{1,t+i,t}$.

Das ist eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung.¹⁾

Das Hauptargument der Kritiker am Hicks-Modell richtet sich gegen dessen Annahme, daß die Risikoprämien immer positiv sein müßten.

Vor allem wendet Joan Robinson²⁾ ein, daß es verschiedene

to offset the risk incurred."

Hicks, J.R., a.a.O., S. 147

2) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 24-25

1) "A sufficient but not a necessary condition for this to hold is that $0 < L_2 < L_3 < \dots < L_N$."

Malkiel, B.G., a.a.O., S. 26 (2-11)

Vgl. dazu auch S.29 der Arbeit

2) Vgl. Robinson, J., The Rate of Interest and Other Essays, London 1952, S. 3-30

Arten der Unsicherheit bei Wertpapierbesitzern bzw. Anlegern gibt, nämlich ein Kapitalrisiko, das sich in erster Linie auf die Möglichkeit von Kursverlusten bei eventuellem vorzeitigem Verkauf eines langfristigen Wertpapiers ergibt, und andererseits ein Einkommensrisiko, das dann entsteht, wenn nach Beendigung einer kurzfristigen Anlage eine Neuinvestierung zu gleichen Konditionen nicht möglich ist.

Entsprechend den zwei Arten des Risikos müssen auch bei den Risikoprämien zwei Fälle unterschieden werden:

1. positive Risikoprämien bei Berechnung der langfristigen Sätze aus den kurzfristigen (auch erwarteten) Einjahreszinssätzen zur Vermeidung des Kapitalrisikos und
2. entsprechend negative Risikoprämien für die Berechnung der langfristigen Sätze, die das Einkommensrisiko ausgleichen.¹⁾

Bei gleicher Formel

$$r_{1,t+i,t} = e_{1,t+i,t} + I_{1,t+i,t}$$

-
- 1) Kath, D., Die verschiedenen Ansätze der Zinsstrukturtheorie, a.a.O., S. 34:
"Ein Kapitalrisiko geht der Anleger ein, wenn die Laufzeit des Wertpapiers länger als die Anlagedauer ist; steigt nämlich zwischenzeitlich der Zins, so führt dies bei dem erworbenen langfristigen Papier zu einem Kursrückgang, so daß nach Ablauf der Festlegung ein Kapitalverlust eintritt. Das periodische Zinseinkommen dagegen ist ex ante bekannt, und ein Einkommensrisiko ist deshalb nicht vorhanden. Jedoch ist die Gesamtrendite unbestimmt; sie kann bei hinreichend hohem Kapitalverlust Null oder gar negativ werden.
Übersteigt umgekehrt die Anlagedauer die Wertpapierlaufzeit, werden also während der gesamten Anlagedauer mehrmals kurzfristige Papiere erworben, dann ist ein Kapitalrisiko ausgeschlossen. Dagegen besteht hinsichtlich des Zinsertrages ein Einkommensrisiko, da der Zinssatz bei der mehrfach notwendigen Wiederanlage ungewiß ist. Sinkt der kurzfristige Zinssatz gegenüber der Ausgangsperiode, dann tritt ein Einkommensverlust ein."

muß also nach der These von Hicks

im Fall a) $L_{1,t+i,t} > 0$,

im Fall b) $L_{1,t+i,t} < 0$ sein.

Die Annahme stets positiver Liquiditätsprämien widerspricht auch der Empirie. Nach Hahn läßt sich z.B. der Bundesbankstatistik entnehmen, "daß die Zinssätze mit zunehmender Fristigkeit steigen ... - entsprechend der Liquiditätstheorie von Otto Veit. Diese Regel wird bestätigt durch die Ausnahme: Tagesgeld ist dann teurer als Termingeld, wenn lediglich ein sehr kurzfristiger Liquiditätsbedarf gedeckt werden soll und/oder für die nächsten Tage eine Zunahme des Kreditangebotes erwartet wird - wie an besonderen Zahlungsterminen, vor allem aber am Jahresultimo."¹⁾²⁾

b) Das Meiselman-Modell

Das wesentlich Neue im Meiselman-Modell besteht in der Berichtigung eines möglichen Erwartungsfehlers, der definiert ist als Differenz zwischen den erwarteten Einperiodenzinssätzen für das gleiche Jahr $t+i$ - einmal erwartet im Jahr $t+0$, einmal im Jahr $t-1$ - also als Differenz

$$e_{1,t+i,t} - e_{1,t+i,t-1} \quad 3)$$

1) Hahn, O., Geld- und Devisenhandel, a.a.O., S. 16

2) Die Annahme der vollständigen Substituierbarkeit für Papiere mit unterschiedlichen Restlaufzeiten, wie sie Hicks bemängelte, führte zu der von Culbertson vertretenen Markttrennungshypothese, d.h. einem Markt für langfristige und zu einem davon - mehr oder weniger - scharf getrennten Markt für kurzfristige Papiere, wo sich die jeweiligen Zinssätze i.S. der Loanable Funds Theorie je nach Angebot und Nachfrage bilden. Vgl. Culbertson, J.M., The Term Structure of Interest Rates, In: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 71 (1957), S.485-517. Culbertson hat sich mit der strikten Markttrennungshypothese ziemlich isoliert.

Vgl. dazu: Feldstein, M., Chamberlain, G., Multimarket Expectations and The Rate of Interest, in: Journal of Money, Credit and Banking, Vol. V (1973), Heft 4, S.877: "Hicks, Lutz and Modigliani and Sutch have recognized, the long-term and short-term markets are neither fully arbitrated nor completely separate."

3) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 51 (I-VIII-3) nach Meiselman, D., a.a.O., S. 20

Diese Berücksichtigung erfolgt durch Vergleich der obigen Differenz für das Jahr $t + i$ mit der Differenz

$$R_{1,t} - r_{1,t,t-1},$$

d.h. des geltenden Einjahreszinses und seines Erwartungswertes vom Vorjahr.

Das ist der Irrtum in der Erwartung des Investors für den Zinssatz des Anfangsjahres $t = t + 0$.

"Wenn man zwei Zinsstrukturen verschiedener Zeitpunkte miteinander vergleicht, so enthält die erste Zinsstruktur implizierte zukünftige Zinssätze als Erwartungswerte für den späteren Zeitpunkt.

Die Zinsstruktur des zweiten Zeitpunktes gibt also die wirklichen Daten an. Man könnte deshalb aus einer Zinsstruktur im Zeitpunkt t aufgrund der angenommenen Gültigkeit der Erwartungstheorie errechnen, welche implizierten Erwartungswerte für den Zeitpunkt $t + 1$ anzunehmen sind, und diese dann mit den realisierten im Zeitpunkt $t + 1$ vergleichen. ¹⁾

Meiselman setzt eine lineare Abhängigkeit der genannten Differenzen voraus ²⁾, d.h. er nimmt an, daß folgende Gleichungen bestehen

$$e_{1,t+i,t} - e_{1,t+i,t-1} = a + b (R_{1,t} - e_{1,t,t-1})$$
$$i = 1, \dots, n.$$

Da nach der klassischen Erwartungstheorie

$$r_{1,t+i,t} = e_{1,t+i,t}$$

ist, lautet die "testbare Hypothese" ³⁾

1) Neumann, M., a.a.O., S. 237-238

2) Vgl. Meiselman, D., a.a.O., S. 20

3) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 51

$$r_{1,t+i,t} - r_{1,t+i,t-1} = a + b (R_{1,t} - r_{1,t,t-1})$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Wegen der Insignifikanz des Terms a seiner Gleichung zog Meiselman den Schluß, daß es keine Liquiditätsprämien gibt.

Dagegen haben Wood¹⁾ und Kessel²⁾ gezeigt, daß die Gleichung für $a = 0$ mit der Existenz von Liquiditätsprämien vereinbar ist, Meiselman sich also geirrt hatte.

c) Die Verwendung der Meiselman'schen Gleichungen zur Abschätzung der Größe der Liquiditätsprämien durch Buse

Da anschließend die Gleichungen von Meiselman in der Form von Buse³⁾ benutzt werden, wird von folgender (gemäß der Aussage der Liquiditätspräferenztheorie abgeänderten) Meiselman'schen Gleichung ausgegangen:

$$\begin{aligned} e_{1,t+i,t} - e_{1,t+i,t-1} \\ = a + b (R_{1,t} - e_{1,t,t-1} - L_{1,t,t-1}). \end{aligned}$$

Hinsichtlich der Größenordnung der Liquiditätsprämien wird angenommen⁴⁾

$$0 < L_{1,t,t-1} < L_{1,t,t-2} \dots < L_{1,t,t-n}$$

-
- 1) Vgl. Wood, J.H., Errors and The Term Structure of Interest Rates, in: The Journal of Political Economy, Bd. 71 (1963)
Vgl. Wood, J.H., The Expectations Hypothesis, The Yield Curve and Monetary Policy, in: Quarterly Journal of Economics, Bd. 78 (1964)
 - 2) Vgl. Kessel, R.A., The Cyclical Behavior of The Term Structure of Interest Rates, Occasional Paper 91, Hrsg. National Bureau of Economic Research, New York 1965,
 - 3) Buse, A., Interest Rates, The Meiselman Model and Random Numbers, in: The Journal of Political Economy, Bd. 75 (1967)
 - 4) Vgl. Meiselman, D., a.a.O., S. 45 und Faßbender, H., a.a.O., S. 30 (I-III-6)

d.h. daß die $L_{1,t-i}$ eine monoton steigende Folge von Zahlenwerten bilden.

Die Terme a und b (b kann als Regressionskoeffizient betrachtet werden) sind dabei als von i abhängig zu betrachten, also genauer in der Form

$$a = a(i)$$

$$b = b(i)$$

zu schreiben.

Eine einfache Abschätzung der Größe der Liquiditätsprämien ist möglich, wenn man mit Buse annimmt, "daß die vom Investor geforderte Liquiditätsprämie für die Verlängerung der Anlagedauer von i auf $i + 1$ Perioden im Zeitablauf konstant bleibt" ¹⁾, also von t unabhängig ist.

Man kann in diesem Falle in dem Symbol

$$L_{1,t+i,t}$$

den Buchstaben t auslassen und statt

$$L_{1,t+i,t} \text{ einfacher } L_{1,i}$$

schreiben.

Für die Berechnung von $L_{1,i}$ erhält man dann folgendes Gleichungssystem

$$L_{1,1} - L_{1,2} = a_1 - b_1 L_{1,1}$$

$$L_{1,2} - L_{1,3} = a_2 - b_2 L_{1,1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$L_{1,n} - L_{1,n+1} = a_n - b_n L_{1,1}$$

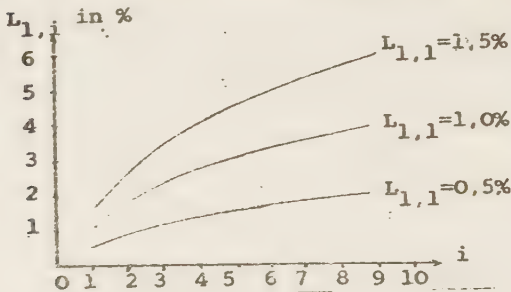
1) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 53

mit der allgemeinen Lösung

$$L_{1,n+1} = L_{1,1} \left(1 + \sum_{i=1}^n b_i \right) - \sum_{i=1}^n a_i .$$

Die drei Kurven für die Liquiditätsprämien, die man erhält, wenn man mit Buse für $L_{1,1}$ die speziellen Zahlenwerte 0,5; 1,0; 1,5 einsetzt, zeigen folgenden charakteristisch gekrümmten Verlauf:

Verlauf der Liquiditätsprämie nach Buse



Quelle: Fassbender, H., a.a.O., S. 54

Jedoch bemerkt Faßbender hinsichtlich dieser Kurven und der ihnen zugrundeliegenden Wertetabelle, die auf der folgenden Seite nachgetragen wird: "Allerdings weicht der Verlauf der Kurven von dem bei Buse ab. Die Funktionswerte wurden aufgrund der Ergebnisse von Meiselman neu berechnet und in der Tabelle ... ¹⁾ zur Kontrolle angegeben."²⁾

1) s. folgende Seite

2) Faßbender, H., a.a.O., S. 55

Nach Faßbender handelt es sich bei den $L_{1,i}$ -Werten seiner nachfolgenden Tabelle¹⁾

Tabelle 1-VIII-1

Berechnung der Liquiditätsprämien
aufgrund der Ergebnisse von Meiselman in Tabelle 5-II-1

i	$L_{1,i}$ in%		
	$L_{1,1}=0,5\%$	$L_{1,1}=1,0\%$	$L_{1,1}=1,5\%$
1	0,85	1,70	2 56
2	1,11	2,23	3,35
3	1,32	2,64	3,97
4	1,51	3,00	4,49
5	1,69	3,30	4,93
6	1,82	3,54	5,29
7	1,96	3,80	5,67
8	2,05	4,00	5,97

um Werte, die mittels der angegebenen Formel für

$$L_{1,n+1}$$

aus den $a(i)$ und $b(i)$ -Werten der Tabelle 5-II-1²⁾ für $i = 1, \dots, n$ berechnet worden sind.

1) Faßbender, H., a.a.O., S. 55

2) übernommen aus Meiselman, D., a.a.O., S. 22

Die Tabelle 5-II-1 wird zum Vergleich angegeben.

Tabelle 5-II-1¹⁾

Test von Meiselman

n	a (mit Standard- abweichung)	b	R
1	0,00 (0,02)	0,703	0,952
2	0,00 (0,02)	0,526	0,867
3	- 0,01 (0,04)	0,403	0,768
4	- 0,03 (0,04)	0,326	0,682
5	- 0,02 (0,04)	0,277	0,642
6	- 0,01 (0,02)	0,233	0,625
7	- 0,02 (0,03)	0,239	0,631
8	0,01 (0,03)	0,208	0,590

Eine Überprüfung der von Faßbender angegebenen Werte in der von ihm "aufgrund der Ergebnisse von Meiselman neu berechneten"²⁾ Tabelle ist auf verschiedene Weise möglich, entweder durch Nachvollzug der Faßbender'-schen Rechnung,

1) Faßbender, H., a.a.O., S. 193

2) Siehe Zitat auf S.214 dieser Arbeit

oder aber durch Umkehrung dieses Rechenverfahrens, d.h. indem man umgekehrt die $a(i)$ und $b(i)$ - Werte der Tabelle 5-II-1 aus den $L_{1,i}$ -Werten der Tabelle 1-VIII-1 bestimmt, was möglich ist, da zur Berechnung zweier Unbekannten (nämlich $a(i)$ und $b(i)$) die zwei $L_{1,i}$ -Reihen, die sich aus 2 der 3 Anfangswerte (z.B. aus 0,5 und 1,0) bestimmen lassen, genügen würden.

Die aus dem dritten gegebenen Zahlenwert ($L_{1,1} = 1,5$) sich ableitende $L_{1,i}$ -Reihe kann dann zur Kontrolle der Richtigkeit der errechneten $a(i)$ und $b(i)$ -Werte dienen.

Zur nachfolgenden Rechnung ist allgemein - hinsichtlich der Größe der möglicherweise auftretenden Ungenauigkeiten - zu sagen, daß, da die Bestimmung der $a(i)$ und $b(i)$ bei dieser Umkehrung des Faßbender'-schen Rechenganges sukzessive erfolgt, d.h. bei der Berechnung von $a(i)$ und $b(i)$ die zuvor berechneten $a(i-1)$ und $b(i-1)$ -Werte benutzt werden, mit einem Verstärkungseffekt des eventuellen Fehlers bei höheren i -Werten zu rechnen ist.

Die allgemeine Gleichung für

$$L_{1,n+1}$$

lautet

$$\text{für } i = 1: \quad L_{1,2} = L_{1,1} (1 + b_1) - a_1 , ,$$

was mit den Werten von

$$L_{1,1} = 0,5 \quad \text{bzw.} \quad L_{1,1} = 1,0$$

ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (a_1 , b_1) ergibt.

$$\text{I. } 0,85 = \frac{1}{2} \cdot (1 + b_1) - a_1$$

$$\text{II. } 1,7 = 1 \cdot (1 + b_1) - a_1$$

$$\text{I. } 0,35 = \frac{1}{2} b_1 - a_1$$

$$\text{II. } 0,7 = 1 b_1 - a_1$$

$$\frac{1}{2} b_1 = 0,7 - 0,35 = 0,35$$

$$\underline{b_1 = 0,7}$$

Für a_1 folgt aus I oder II durch Einsetzen von $b_1 = 0,7$ der Wert 0.

Einsetzen von $a_1 = 0$ und $b_1 = 0,7$ in die "Kontrollgleichung"

$$2,56 = 1,5 (1 + 0,7) - 0$$

zeigt, daß sich der Wert der rechten Seite

$$1,5 \cdot 1,7 = 2,55$$

um 0,01 vom Zahlenwert der linken Seite unterscheidet, offenbar eine Folge der abgerundeten Zahlenwerte für $L_{1,i}$ der Tabelle 1-VIII-1.¹⁾

$$\underline{i = 2}$$

$$\text{I. } 1,11 = 0,5 (1 + b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)$$

$$\text{II. } 2,23 = 1,0 (1 + b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)$$

Durch Einsetzen von

$$b_1 = 0,7 \quad \text{und} \quad a_1 = 0,$$

1) Vgl.S.215 (Der Wert 2,56 für $L_{1,2}$ gehört zum $L_{1,1}$ -Wert 1,5, d.h. zur 3. Spalte der Tabelle 1-VIII-1)

die als Ergebnisse der a_i und b_i Berechnung für $i = 1$ zu übernehmen sind, erhält man aus I und II

$$1,23 - 0,61 = (b_1 + b_2) \cdot 0,5$$

$$0,62 - 0,5 \cdot 0,7 = 0,5 \cdot b_2$$

$$\underline{0,54 = b_2}$$

Einsetzen von b_2 in I oder II liefert für a_2 den Wert $a_2 = 0,01$.

Die Kontrollgleichung

$$3,35 = \frac{1,5 \cdot (1 + 0,7 + 0,54)}{3,36} - (0 + 0,01)$$

ist hier genau erfüllt.

Für $i = 3, 4$ usw. ergibt die Gegenüberstellung der "zurückgerechneten" a_i, b_i -Werte mit den entsprechenden Werten der Tabelle 5-II-1:

<u>1-VIII-1</u>	<u>5-II-1</u>
$a_3 = - 0,01; \quad b_3 = 0,40$	$a_3 = - 0,01; \quad b_3 = 0,403$
$a_4 = - 0,02; \quad b_4 = 0,34$	$a_4 = - 0,03; \quad b_4 = 0,326$
usw.	usw.

Bei der "Hinrechnung", d.h. bei der Bestimmung der $L_{1,i}$ -Werte nach der Formel für $L_{1,n+1}$ aus den bekannten, d.h. aus der Tabelle 5-II-1 abgelesenen a_i und b_i -Werten ¹⁾, erhält man die folgenden Zahlenwerte, die zum Vergleich mit der Tabelle 1-VIII-1 von Faßbender ²⁾ in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt wurden.

1) Diese Werte bestimmen den Kurvenverlauf der Liquiditätsprämien, der auf S.214 dargestellt wurde.

2) Vgl. S. 215

Wertetabelle für den Kurvenverlauf der Liquiditätsprämien¹⁾

i	$L_{1,i}$ in %		
	$L_{1,1} = 0,5\%$	$L_{1,1} = 1,0\%$	$L_{1,1} = 1,5\%$
1	0,8515	1 703	2,5545
2	1,1145	2,229	2,3434
3	1,326	2,642	3,958
4	1,519	2,993	4,477
5	1,6775	3,2905	4,9125
6	1,804	3,538	5,272
7	1,9435	3,797	5,6505
8	2,0375	3,995	5,9525

1) Vgl. S.215

2. Das Lutz-Modell und das Makro-Modell von Malkiel

a) Die Erweiterung der klassischen Erwartungstheorie

Während die klassische Erwartungstheorie davon ausgeht, daß alle Investoren gleiche Erwartungen haben, versucht Lutz¹⁾ bei der Bestimmung der Zinsstruktur unterschiedliche Erwartungen mitzuberücksichtigen.

Dabei geht er von einem Partialmodell aus, das die Gleichgewichtsbedingungen auf dem Kreditmarkt aufzeigen soll.

Eine Erläuterung des Lutz-Modells, die Zinsstruktur graphisch wie rechnerisch aus den aggregierten (akkumulierten) Schuldangebots- bzw. Schuldnachfragebeträgen zu ermitteln, findet sich bei Faßbender²⁾, der dabei wie Lutz

a) von der Erwartung einer Zinserhöhung,

b) von der Erwartung einer Zinssenkung

ausgeht.

Das auf der x-Achse abzutragende aggregierte Schuldangebot der Emittenten (bzw. Abtragung der aggregierten Kreditnachfrage) ergibt sich gemäß der optimalen Anlageentscheidung des einzelnen Investors (k) durch Summation der Beträge, die von jenen Investoren zur Verfügung gestellt werden, die bereit sind, bis zu dem betreffenden, auf der y-Achse abzutragenden Zinssatz zu investieren.

Allerdings ist der Ausdruck "bis" dann so zu verstehen, daß der zu einem bestimmten Zinssatz gehörige Akkumulationsbetrag die Summe der bei diesem oder einem höheren Zinssatz zur Ausgabe von Wertpapieren bereiten Emittenten darstellt, während auf der Angebotsseite der Ausdruck "bis" die Häufigkeitssumme derjenigen Investoren (genauer: die Höhe des durch sie vertretenen Kreditvolumens) darstellt,

1) Lutz, F.A., The Structure of Interest Rates, in: Quarterly Journal of Economics, Vol 55 (1940), S. 36 - 63

2) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 35-42, S. 90-94, dessen Symbolik hier aus Vergleichsgründen in der Hauptsache beibehalten wird.

die bei diesem oder bereits bei einem niedrigeren Zinssatz zur Geldanlage bereit sind.

Die Anlageentscheidung der Investoren ist abhängig einerseits vom allgemein erwarteten (d.h. "vom Markt als solchem"¹⁾ erwarteten) Einperiodenzinssatz $e_{1,t+i,t}$ andererseits von dem vom Investor k im Zeitpunkt t für den Zeitpunkt $t + i$ erwarteten Einperiodenzinssatz $e_{1,t+i,t}^{(k)}$.

Die von Faßbender angewendete Formel für die "objektiven" Marktpreise $P_{t+n,t}$, die die Zinsstruktur zum Zeitpunkt $t + n$ ($n < \nu$) umfaßt, entspricht der von Malkiel²⁾ benutzten Kursformel allerdings mit Couponbeträgen, die einen Laufzindex i erhalten, um die Beziehung zwischen Effektivzinssatz und Couponsatz anzudeuten.

Daraus leitet Faßbender die Formel für den "subjektiven" Gegenwartswert $P_t^{(k,x)}$, d.h. für eine langfristige Anlage von t bis $t + x$, ab

$$P_t^{(k,x)} = \frac{C_1}{1+R_{1,t}} + \frac{C_2}{(1+R_{1,t})(1+e_{1,t+1,t}^{(k)})} + \dots +$$

$$\frac{C + P_{t+x,t}}{(1+R_{1,t})(1+e_{1,t+1,t}) \dots (1+e_{1,t+x-1,t})}, \quad x \leq n.$$

Das Maximierungsproblem besteht in der Bestimmung desjenigen x , für das der $P_t^{(k,x)}$ -Wert maximal wird. Der erste Teil der Entscheidungsregel, nämlich die Bestimmung von

$$\max_x \{P_t^{(k,t+x)}\} \Rightarrow x_{\text{opt.}}$$

1) Lutz, F.A., The Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 48 ff.

2) Vgl. S. 5

setzt die Kenntnis der zu vergleichenden Gegenwartswerte $p_t(k, t+x)$ voraus, die sich "subjektiv" je nach der Erwartungsstruktur der Investoren bzw. "objektiv" nach der Erwartungsstruktur des Marktes ergeben.

Nimmt man mit Faßbender folgende Erwartungsstrukturen für Einperiodenzinssätze an

im	Erwartungsstruktur des Marktes	Erwartungsstruktur der Investoren	
		fallende Zinsfolge	steigende Zinsfolge
1. Jahr	$R_{1,t+0} = 2,0\%$	$R_{1,t+0} = 2,00\%$	$R_{1,t+0} = 2,00\%$
2. Jahr	$e_{1,t+1,t} = 2,5\%$	$e_{1,t+1,t}^{(k)} = 5,00\%$	$e_{1,t+1,t}^{(k)} = 2,25\%$
3. Jahr	$e_{1,t+2,t} = 3,0\%$	$e_{1,t+2,t}^{(k)} = 4,00\%$	$e_{1,t+2,t}^{(k)} = 2,50\%$
4. Jahr	$e_{1,t+3,t} = 3,5\%$	$e_{1,t+3,t}^{(k)} = 2,50\%$	$e_{1,t+3,t}^{(k)} = 4,00\%$
5. Jahr	$e_{1,t+4,t} = 4,0\%$	$e_{1,t+4,t} = 2,25\%$	$e_{1,t+4,t}^{(k)} = 5,00\%$
6. Jahr	$e_{1,t+5,t} = 4,5\%$		
7. Jahr	$e_{1,t+6,t} = 5,0\%$		
8. Jahr	$e_{1,t+7,t} = 5,5\%$		

d.h. geht man beispielsweise von einem "Zeithorizont" und einer maximalen Anlagedauer von 5 Perioden für einen

individuellen Anleger aus, dann muß dieser Investor k zunächst untersuchen, welche der langfristigen Anlagen

$$p_t^{(k,t+2)}, p_t^{(k,t+3)}, p_t^{(k,t+4)}, p_t^{(k,t+5)}$$

den größten Gegenwartswert besitzt. (Der Wert für $x = 1$ entfällt, weil das keine langfristige, sondern eine dauernd kurzfristige Anlage bedeuten würde).

Nach Faßbender erhält man aus den Einperiodenzinssätzen der Erwartungsstruktur des Marktes die "objektiven" Marktpreise mittels der Formel

$$p_{t+n,t} = \frac{C_{n+1}}{1+e_{1,t+n,t}} + \frac{C_{n+2}}{(1+e_{1,t+n,t})(1+e_{1,t+n+1,t})} + \dots + \frac{C + F}{(1+e_{1,t+n,t})(1+e_{1,t+n+1,t}) \dots (1+e_{1,t+n-1,t})}$$

Eine wesentliche Vereinfachung dieser Methode der Bestimmung der $p_{t+n,t}$ -Werte ergibt sich, wenn man die Marktpreise in einem kettenbruchartigen Verfahren aus dem Nennwert $F = 100$ sukzessiv (d.h. Jahr für Jahr) zurückrechnet. Mit $C_i = 4$ errechnen sich bei Benutzung der vom Markt erwarteten Zinssätze die "objektiven" Marktpreise z.Zt. $t + 0$ mit Hilfe des vereinfachten Rechenverfahrens, was umseitig gezeigt wird.¹⁾

1) Daß dieses sukzessive kettenbruchartige Verfahren gegenüber dem von Faßbender angewandten tatsächlich eine wesentliche Vereinfachung bedeutet, erkennt man, wenn man dessen Vorschrift zur Bestimmung der "subjektiven" Gegenwartswerte vergleicht: "Die subjektiven Gegenwartswerte einer bis x langfristigen Anlage berechnet Investor k , indem er zunächst zu dem objektiven Marktpreis p_{t+x} die mit seinen Zinserwartungen aufdiskontierten Couponbeträge hinzuaddiert und anschließend diese Summe, die er seiner Erwartung gemäß bis angepaßt hat, mit seinen Zinserwartungen und dem in t geltenden Einjahreszins abdiskontiert." Faßbender, H., a.a.O., S. 92

Erwartungsstruktur les k-ten Investors (fallende Zinsfolge)	Erwartungsstruktur des Marktes	Erwartungsstruktur des k-t Investors (steigende Zinsfolge)
$p_t(k,t) = 102,46$ $R_{1,t} = 2\%$ $p_t(k,t+1) = 102,46$ $e_{1,t+1,t} = 5\%$ $p_t(k,t+2) = 100,11$ $e_{1,t+2,t} = 4\%$ $p_t(k,t+3) = 99,22$ $e_{1,t+3,t} = 2,5\%$ $p_t(k,t+4) = 100,08$ $e_{1,t+4,t} = 2,25\%$ $p_t(k,t+5) = 101,54$	$p_t = 102,46$ $R_{1,t} = 2\%$ $p_{t+1} = 100,51$ $e_{1,t+1,t} = 2,5\%$ $p_{t+2} = 99,02$ $e_{1,t+2,t} = 3\%$ $p_{t+3} = 97,99$ $e_{1,t+3,t} = 3,5\%$ $p_{t+4} = 97,42$ $e_{1,t+4,t} = 4\%$ $p_{t+5} = 97,31$ $e_{1,t+5,t} = 4,5\%$ $p_{t+6} = 97,69$ $e_{1,t+6,t} = 5\%$ $p_{t+7} = 98,58$ $e_{1,t+7} = 5,5\%$ $p_{t+8} = 100,--$	$p_t(k,t) = 102,46$ $R_{1,t} = 2\%$ $p_t(k,t+1) = 102,46$ $e_{1,t+1,t} = 2,25\%$ $p_t(k,t+2) = 102,70$ $e_{1,t+2,t} = 2,5\%$ $p_t(k,t+3) = 103,16$ $e_{1,t+3,t} = 4\%$ $p_t(k,t+4) = 102,72$ $e_{1,t+4,t} = 5\%$ $p_t(k,t+5) = 101,88$

$$\frac{100,51+4}{1,02} = 102,46$$

$$\frac{99,02+4}{1,0225} + \frac{4}{1,02} = 102,46$$

$$\frac{97,99+4}{1,025} + \frac{4}{1,0225} + \frac{4}{1,02} = 103,16$$

$$\frac{97,42+4}{1,04} + \frac{4}{1,025} + \frac{4}{1,0225} + \frac{4}{1,02} = 102,72$$

$$\frac{97,31+4}{1,05} + \frac{4}{1,04} + \frac{4}{1,025} + \frac{4}{1,0225} + \frac{4}{1,02} = 101,88$$

$$\frac{100,4}{1,055} + \frac{4}{1,05} + \frac{4}{1,04} + \frac{4}{1,03} + \frac{4}{1,02} = 101,54$$

$$\frac{97,31+4}{1,0225} + \frac{4}{1,025} + \frac{4}{1,04} + \frac{4}{1,03} + \frac{4}{1,02} = 101,54$$

$$\begin{array}{c}
 98,58 \\
 100,4 \\
 1,055 \\
 \hline
 97,69 \\
 4 \\
 1,05 \\
 \hline
 97,31 \\
 4 \\
 1,04 \\
 \hline
 97,42 \\
 4 \\
 1,035 \\
 \hline
 99,02 \\
 4 \\
 1,03 \\
 \hline
 100,51 \\
 4 \\
 1,025 \\
 \hline
 102,46
 \end{array}$$

In völlig entsprechender Weise errechnen sich die "subjektiven" Gegenwartswerte, wenn man in der kettenbruchartigen Regression von 8 Jahren auf 0 Jahre vom Beginn des 5. Jahres ab statt der Zinssätze des "Marktes" die "subjektiven" Zinssätze verwendet.¹⁾

Der 2. Teil der Entscheidungsregel besteht darin, den größten Gegenwartswert einer langfristigen Anlage mit dem Gegenwartswert (P_t) einer dauernd kurzfristigen Anlage zu vergleichen.

Der Vergleich der Zahlenwerte von

$$\left. \begin{aligned} P_t^{(k,t+2)} &= 102,70 \\ P_t^{(k,t+3)} &= 103,16 \\ P_t^{(k,t+4)} &= 102,72 \\ P_t^{(k,t+5)} &= 101,88 \end{aligned} \right\} \text{ mit } P_t^{(k,t+1)} = 102,46$$

ergibt für dieses Beispiel

$$P_t^{(k,t+3)} = 103,16$$

als maximalen Gegenwartswert einer langfristigen Anlage bis $t + 3$ und für x_{opt} somit

$$x_{opt} = t + 3.$$

Von den möglichen (zugelassenen) Strategien

1. dauernde kurzfristige Anlage,
2. langfristige Anlage bis $t + 2$,
dann kurzfristige Anlage
3. langfristige Anlage bis $t + 3$,
dann kurzfristige Anlage

1) Siehe die Berechnung auf S. 225

4. langfristige Anlage bis $t + 4$,
dann kurzfristige Anlage
5. langfristige Anlage für den
gesamten "Zeithorizont"

erweist sich also die langfristige Anlage bis $t + 3$ und die dann kurzfristige Anlage als optimal.

Die Berechtigung für die Entscheidungsregel läßt sich zeigen, wenn auch die Vermögenswerte, in die die Gegenwartswerte bei Anwendung der unterschiedlichen Strategien hineinwachsen, das Ergebnis bestätigen.

Wie schon gezeigt¹⁾, kann auf eine rechnerische Überprüfung verzichtet werden, da das Verhältnis von

$$V_{t+5, x} : P_t^{(k, t+x)}$$

für alle Werte von x konstant ist, nämlich gleich dem Produkt der fünf aus den "subjektiven" Erwartungszinssätzen gebildeten Aufzinsungsfaktoren

$$1,02 \cdot 1,0225 \cdot 1,025 \cdot 1,04 \cdot 1,05 = 1,1673738.$$

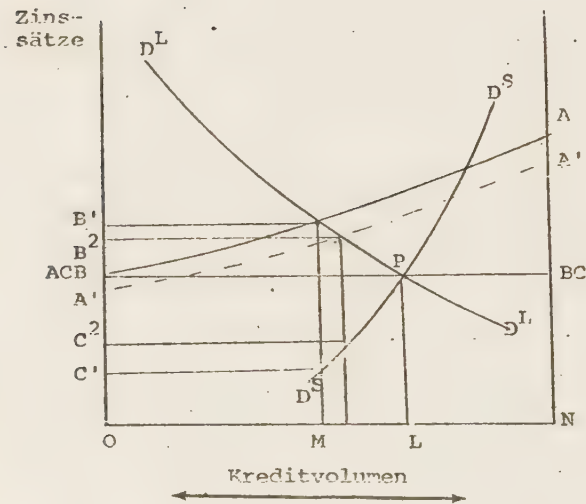
Die genauen Werten für die genannten Verhältnisse sind

V_{t+5}	$P_t^{(k, t+x)}$	Verhältnis
$V_{t+5,1} = 119,61$	$P_t^{(k, t+1)} = 102,46$	1,1674
$V_{t+5,2} = 119,89$	$P_t^{(k, t+2)} = 102,70$	1,1674
$V_{t+5,3} = 120,43$	$P_t^{(k, t+3)} = 103,16$	1,1674
$V_{t+5,4} = 119,92$	$P_t^{(k, t+4)} = 102,72$	1,1674
$V_{t+5,5} = 118,94$	$P_t^{(k, t+5)} = 101,88$	1,1674

1) Vgl. S.8 ff.

b) Die Berücksichtigung unterschiedlicher Erwartungen
in der graphischen Darstellung von Lutz

Die Bestimmung der Zinsstruktur unter Berücksichtigung unterschiedlicher aggregierter bzw. akkumulierter Erwartungen wird durch die bekannte Darstellung von Lutz graphisch vorgenommen:



Quelle: Lutz, F.A., The Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 52

Lutz geht von einem Gleichgewicht zwischen lang- (Kapitalmarkt-) und kurzfristigen (Geldmarkt-) Zinssätzen aus, wobei ON als das gesamte Geldangebot, das für den Geld- wie für den Kapitalmarkt zusammen zur Verfügung

steht, aufzufassen ist.¹⁾

$D^L D^L$ ist die Kurve, die bei unterschiedlichen langfristigen Zinssätzen die Höhe des auf diesem Markt nachgefragten Kreditvolumens (aggregierte Geldmittelmenge) widerspiegelt, wobei von O als Koordinatenursprung auszugehen ist (d.h. die langfristig anzulegende - nachgefragte - Geldmenge wird in Richtung von O nach N auf der Strecke ON abgetragen).

Der negative Anstieg der $D^L D^L$ -Kurve läßt sich damit erklären, daß bei hohen Zinssätzen die Nachfrage nach Geldmitteln wegen der hohen Zinsbelastung der Emittenten sinkt.²⁾

Die $D^S D^S$ -Kurve stellt die Nachfrage nach kurzfristigen Mitteln dar, wobei von N als dem Koordinatenursprung auszugehen ist (d.h. die kurzfristig anzulegende - nachgefragte - Geldmenge wird in Richtung von N nach O auf der Strecke ON abgetragen).

Der entgegengesetzte Anstieg (verglichen mit der Nachfragekurve für langfristige Titel) ergibt sich aus der spiegelbildlichen Abtragung der Kurven in bezug auf die Ursprungspunkte O bzw. N.

Die Angebotskurve für langfristige Geldmittel ist iden-

1) Lutz, F.A., The Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 55: "The diagram can ... be used to show that we may obtain equal interest rates, not only if all members of the market expect the interest rate to remain stable (I am here neglecting the cost factor), but also if different members have different expectations, provided the distribution of the latter is such as to give an "expectations curve" which goes through the point P in the diagram - an unlikely coincidence."

2) Vgl. dazu auch: Hahn, O., Die Zinsempfindlichkeit der Kreditnehmer, in: Oesterreichisches Bank-Archiv, 15. Jg. (1967), Heft X und XI

tisch mit der Angebotskurve für kurzfristige Mittel, wenn man davon ausgeht, daß die Summe der angebotenen lang- und kurzfristigen Mittel konstant ist, also in dem Sinne, daß alle Geldmittel, die nicht langfristig angeboten werden, kurzfristig angeboten werden müssen. Diese Kurve wird von Lutz selber als "Erwartungskurve"¹⁾ bezeichnet, von Faßbender als Schuldnachfragekurve, nämlich die Kurve, die die "Erwartungsstruktur auf der Schuldnachfrageseite"²⁾ wiedergibt. Also kann - da Kreditangebot und Schuldnachfrage gleichbedeutend sind - die Kurve AA als (Kredit-)Angebotskurve aufgefaßt werden.

Verlangen die Kreditanbieter einen höheren langfristigen Zinssatz als den z.Zt. geltenden Marktzinssatz (d.h. erwarten sie eine Kurssenkung der im Umlauf befindlichen langfristigen Papiere), was durch den Verlauf der Kurve AA zum Ausdruck gebracht werden soll, dann werden sie es vorziehen, "... to invest in the short market, their inducement to do so being the greater the wider the gap between their 'subjective' long rate and the actual long rate."³⁾

Das bedeutet, daß - wegen der Annahme, daß die Summe der angebotenen kurz- und langfristigen Mittel konstant ist - auf dem kurzfristigen Markt das angebotene Kreditvolumen steigen muß und somit zu einer Senkung des kurzfristigen Zinssatzes bis auf 'OC' führt und gleichzeitig eine Erhöhung des langfristigen Zinssatzes bis zu 'OB' be-

1) Lutz, F.A., The Term Structure of Interest Rates, a.a.Q, S. 53:

"AA is what we shall call the 'expectations' curve: it represents the line-up of the 'subjective' long rates which correspond to people's expectation after the latter have changed.

2) Faßbender, H., a.a.O., S. 39

3) Lutz, F.A., The Term Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 51

wirkt, wenn man sich vorstellt, daß der Anpassungsprozeß an das neue Gleichgewicht¹⁾ - wie bei komparativ-statischer Sicht - ohne time lag erfolgt.²⁾

Berücksichtigt man zusätzlich, daß sich im Zuge des Anpassungsprozesses eine Veränderung der Erwartungen der Investoren in bezug auf die Höhe des Zinssatzes ergeben wird, verschiebt sich die Erwartungskurve AA z.B. nach A'A', so daß sich das neue Gleichgewicht schließlich bei OB² (langfristiger Zinssatz) und OC² (kurzfristiger Zinssatz) einstellen wird.

Das neue Gleichgewicht hängt nach Lutz von zwei Faktoren ab,

1. vom Kreditvolumen der Investoren, die im Vergleich zur Ausgangssituation höhere langfristige Zinssätze fordern und
2. von der Zinsempfindlichkeit der Investoren in bezug auf die Gewährung kurz- bzw. langfristiger Mittel.

Für den Fall einer erwarteten Zinssenkung tritt nach Lutz bei im wesentlich gleichen Verlauf der Nachfrage-³⁾ und Angebotskurve eine Verschiebung der AA-Kurve in dem Sinne ein, daß sie zum größten Teil unterhalb der BB-Linie

-
- 1) Lutz, F.A., The Term Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 53:

"Now assuming that this curve remains unaltered throughout the process of adjustment, we see that equilibrium will be re-established with the long rate OB', the short rate OC', OM invested in the long market; and NM in the short market."

- 2) Vgl. dazu auch: Dürr, E., Time lags der Geldpolitik Systematik der Zusammenhänge, Ursachen und Verkürzungsmöglichkeiten, in: Kredit und Kapital, 3. Jg. (1970), S. 129-148
- 3) was von Lockett u.a. bemängelt wird, insbesondere die Nichtberücksichtigung von Veränderungen der Erwartungen auf Seiten der Emittenten.
Vgl. Lockett, D.G., Professor Lutz and The Term Structure of Interest Rates, in: Quarterly Journal of Economics, Bd. 73 (1959), S. 131-144

verläuft.¹⁾

Im Gegensatz zu Lutz nimmt Faßbender für diesen Fall an, "daß die N_L -Kurve" (die in seinen Abbildungen 1-VI-2 und 1-VI-3 der AA-Kurve von Lutz entspricht - der Verf.) "in Abhängigkeit vom langfristigen Zinssatz stets unterhalb von BB verläuft."²⁾

Formal ist an dieser Art der Darstellung von Lutz auszusetzen, daß der mögliche Verlauf der Zinsstruktur weder nach oben noch nach unten begrenzt ist.

Es ist aber klar, daß die von Lutz gemachte Voraussetzung eines konstanten Geldmittelangebots (Summe der lang- und kurzfristig angebotenen Mittel) nicht mehr zutreffen kann, wenn der Zinssatz unter eine bestimmte Höhe absinkt (oder gar negativ wird).

Es ist andererseits auch klar, daß - wenn etwa der Zinssatz, bei dem alle bereit sind, langfristig zu investieren (entsprechend der Strecke NA bzw. NA' am rechten Rand der Darstellung von Lutz), vom Marktzins überschritten wird - dieselbe Investitionsbereitschaft auch für einen beliebig höheren Zinssatz zutreffen würde.

Insofern ist es interessant, den Streifen zwischen den Parallelen im Abstand OA (OA') am linken und NA (NA') am rechten Rand mit dem Normalintervall von Malkiel zu vergleichen, da nur zwischen diesen Randzinssätzen eine Einteilung der Investoren in lang- und kurzfristige Anleger möglich ist.

Darauf wird an anderer Stelle noch näher eingegangen.³⁾

1) Lutz, F.A., The Term Structure of Interest Rates, a.a.O., S. 54:

"There is no need to give a detailed analysis of the case where 'the market' expects interest rates to fall. The same sort of analysis could be applied as was used in case (1). In terms of the diagram on page 52 we should have an expectation curve which lay below BB of the most of its length."

2) Faßbender, H., a.a.O., S. 39

3) Vgl. S. 239

c) Ein Vergleich zwischen dem Lutz-Modell und dem
Makro-Modell von Malkiel

Wie Lutz geht auch Malkiel von einem Partialmodell aus, das unter komparativ-statischen Bedingungen untersucht wird. "We assume that these data are all consistent with one another and represent the solution of the general equilibrium system. We can then examine the equilibrium conditions governing one part of the machinery with the aid of the assumption that the requirements of equilibrium in the other parts of the system are simultaneously satisfied."¹⁾

Beim Makro-Modell von Malkiel, das dem Lutz-Modell im wesentlichen entspricht, ergibt sich prinzipiell der gleiche Kurvenverlauf für die Angebots- und Nachfragekurven. Allerdings trägt Malkiel auf der x-Achse den langfristig bzw. kurzfristig nachgefragten (angebotenen) Anteil der Gesamtnachfrage (Gesamtangebotes) in Prozenten und nicht wie Lutz absolut und auf der y-Achse nicht den lang- bzw. kurzfristigen Zinssatz, sondern die Zinsspanne $R_{1,t} - R_{2,t}$ auf.

Faßbender, der die weitgehende Übereinstimmung der Angebots- und Nachfragekurven beim Lutz-Modell einerseits und beim Makro-Modell von Malkiel andererseits betont²⁾, gibt - entsprechend dem Vorgehen von Malkiel³⁾ - eine Ableitung sowohl der Nachfrage- als auch der Angebotskurve aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung (Dichtekurve) der kritischen Terminzinssätze. Dabei kommt Malkiel - wie Faßbender betont - "... ohne den Begriff der Erwartungen des Marktes aus."

1) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 182

2) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 43-49

3) Vgl. Malkiel, B.G., a.a.O., S. 181-213

Bei der Ableitung der Schuldangebots- bzw. der Schuldnachfragefunktion gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung - wird angenommen, daß diese im Bereich zwischen

$$\underline{r}_{1,t+1,t} \quad \text{und} \quad \overline{r}_{1,t+1,t}$$

näherungsweise normal verteilt sind.¹⁾

Der Begriff "kritischer Terminzinssatz" bezieht sich auf die Investitionsentscheidung des Investors k ($r_{1,t+1,t}^k$ mit den Beträgen X_k) bzw. auf die Emissionsentscheidung des Emittenten, d.h. des Schuldanbieters ($r_{1,t+1,t}^s$ mit den Beträgen X_s).

Nimmt man an, daß für die $r_{1,t+1,t}^s$ -Werte und die zugehörigen X_s -Werte die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung, also auch die gleiche Dichtekurve, gilt wie für die $r_{1,t+1,t}^k$ -Werte, deren zugehörige X_k -Werte von $r_{1,t+1,t}^k$ bis $r_{1,t+1,t}^k$ akkumuliert (integriert) die Schuldnachfragefunktion ergeben, so gibt die Restfläche unter der Dichtekurve, d.h. die Fläche zwischen $r_{1,t+1,t}$ und $\overline{r}_{1,t+1,t}$ an, wieviel Prozent der angebotenen Mittel "zur langfristigen Verschuldung bereitstehen" (Schuldangebotsfunktion).²⁾

Da die Integration, die eigentlich eine Summation ist, denn es handelt sich um X_s -Werte, die zu diskreten $r_{1,t+1,t}^s$ gehören, von rechts (also von $\overline{r}_{1,t+1,t}$ aus) nach links erfolgt, ist der Verlauf der Schuldangebotskurve annähernd spiegelbildlich zur Schuldnachfragekurve.

Ein genaues Spiegelbild würde man nur dann erhalten, wenn

1) $\underline{r}_{1,t+1,t}$ = untere Grenze

$\overline{r}_{1,t+1,t}$ = obere Grenze der Terminzinssätze

2) Faßbender, H., a.a.O., S. 47

- a) die Dichtekurven für die Emittenten und Investoren die gleichen wären, und
- b) eine zum Mittelwert symmetrische Dichtekurve vorläge.

Die Schuldangebotskurve weicht aber bei Malkiel auch deswegen von der gespiegelten Form der Nachfragekurve ab, weil er zeigen will, daß seine Darstellung¹⁾ auch den Tatbestand berücksichtigen kann, daß ein bestimmter Teil der Anbieter (bzw. auch der Nachfrager) entweder bereit ist, sich stets nur langfristig, oder nur kurzfristig zu verschulden: "We assume that the portions DA of two-year bonds and A'E of one-year issues are supplied irrespective of the interest-rate spread."²⁾

Faßbender hat versäumt, beim Vergleich der Kurven des Lutz-Modells mit denen des Makro-Modells von Malkiel auf den unterschiedlichen Richtungssinn des Verlaufs der Schuldangebotsfunktion (bei Lutz verläuft die $D^L D^L$ -Kurve von links oben nach rechts unten, bei Malkiel (AA' bzw. BB') umgekehrt) und Schuldnachfragefunktion (bei Lutz verläuft die AA bzw. A'A'-Funktion von links unten nach rechts oben, bei Malkiel (CC') entgegengesetzt) hinzuweisen, was durch das entgegengesetzte Vorzeichen des

1) Malkiel versucht in seinem Modell eine Synthese zwischen der erweiterten Erwartungstheorie im Sinne von Lutz und der Markttrennungshypothese, die in der Hauptsache von Culbertson vertreten wird, herbeizuführen, da unikausale Theorien zwar ästhetisch befriedigend und einfach zu erklären sind, der wirtschaftlichen Wirklichkeit aber nicht voll gerecht zu werden vermögen.

Mit welcher Zurückhaltung er selbst diese Synthese beurteilt, erkennt man aus seiner Anmerkung:

"For whatever this union may breed, it will be harmony. Nevertheless, we shall see that, as one frequently says of mismatched couples, 'They need one another'". Malkiel, B.G., a.a.O., S. 181

2) ders., a.a.O., S. 196

Malkiel'schen Terminzinssatzes $r_{1,t+1,t}$ (bei Malkiel $tR_1 - tR_2$, wobei tR_2 diesen Zinssatz als konstituierenden Anteil enthält) zu erklären ist.

Faßbender versäumt auch bei der Übernahme des Diagramms von Malkiel die ganz wesentliche Festlegung des Nullwertes

$$R_{1,t} = R_{2,t},$$

also

$$R_{1,t} - R_{2,t} = 0,$$

was das Verständnis seiner Abbildung¹⁾ sehr erschwert. Deshalb wird auf der folgenden Seite das Originaldiagramm von Malkiel wiedergegeben.

Da auf der y-Achse die Zinsspanne

$$R_{1,t} - R_{2,t} = R_{\frac{1}{2}t} + \frac{r_{1,t+1,t}}{2}$$

abgetragen wurde, ergibt der Schnittpunkt der Angebots- und Nachfragekurve bei angenommener Kenntnis von $R_{1,t}$ die gesuchte Zinsstruktur $(R_{1,t}; R_{2,t})$.

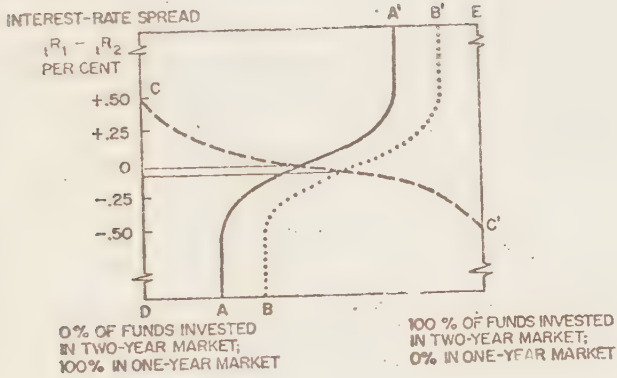
Die geldpolitische Beeinflußbarkeit dieser Zinsstruktur erkennt man, wenn man sich vorstellt, in welcher Weise sich der Schnittpunkt von Schuldangebots- und Nachfragekurve ändert, wenn man die Schuldangebotskurve von rechts nach links verschiebt (d.h. das relative Schuldangebot auf dem kurzfristigen Markt vergrößert bzw. auf dem langfristigen Markt verkleinert): "Das relative Mehrangebot an kurzfristiger Schuld erhöht den kurzfristigen Zins relativ zum langfristigen Zins."²⁾

1) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 48

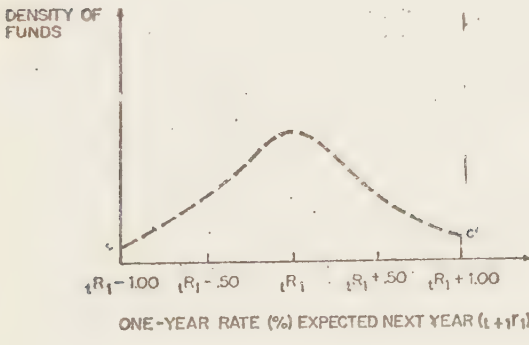
2) ders., a.a.O., S. 48

Zinsspanne

$$R_{1,t} - R_{2,t}$$



Dichte



Quelle: Malkiel, B.G., a.a.O., S. 197

Die Folgerung der klassischen Erwartungstheorie, daß die Zinsstruktur gegenüber relativen (Schuld-)Angebotsänderungen invariant ist, ergibt sich anschaulich unmittelbar aus der Darstellung von Malkiel, da dann die AA'-Kurve (bzw. BB'-Kurve) parallel zur x-Achse (=Prozentachse der langfristig - in den Restprozenten auch kurzfristig - nachgefragten bzw. angebotenen Wertpapiere) verläuft, also identische Erwartungen vorliegen.

Das Normalintervall-Modell von Malkiel

1. Historisches Intervall und Normalintervall

Schon bei dem "Makro-Modell" Malkiels war von einer Begrenzung der Streuung der erwarteten Einjahresterminzinssätze zwischen

$$\begin{array}{ccc} \underline{r}_{1,t+i,t} & \text{und} & \overline{r}_{1,t+1,t} \\ (\text{untere} & \text{bzw.} & \text{obere Grenze}) \end{array}$$

die Rede, und die Dichtekurve, bei der auf der x-Achse ($r_{1,t+1,t}$ -Achse) der Zinssatz und senkrecht dazu (in der Richtung der y-Achse) die dazugehörigen langfristig investierbaren Beträge aufgetragen wurden, hatte nur für dieses Intervall von Null verschiedene Werte.

Die Abgrenzung (Einschachtelung) der Einjahresterminzinssätze in ein bestimmtes Intervall (historisches Intervall/Normalintervall) ist auch der Grundgedanke des von Faßbender so genannten "Normalintervalls" von Malkiel. "Historical interest-rate movements would suggest, however, that a drastic drop in the level of rates to the lowest bound of the normal range has been associated with secular rather than cyclical movements. Thus, investors could not reasonably anticipate that the lower end of the normal range would be realized within, say, one year."¹⁾

Dabei wird angenommen, daß die Anleger beispielsweise mit langfristigen Zinssätzen in einem Bereich zwischen 2% und 5% (historisches Intervall) rechnen.

Für die kurzfristigen Sätze wird eine Streuung in einem

1) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 61

kleineren Intervall (Normalintervall) von etwa 1,5% Breite angenommen. Dabei muß das Normalintervall innerhalb des historischen Intervalls liegen.

Die beiden Hauptbeispiele Malkiels sind:

1. eine Wertpapiergruppe aller Laufzeiten mit dem gleichen Couponsatz 4,5%, d.h. mit einem Couponsatz an der oberen Grenze des historischen Intervalls¹⁾, was ein asymmetrisches Normalintervall von 1/2% nach oben und 1% nach unten zur Folge hat, und
2. eine Wertpapiergruppe aller Laufzeiten mit einem gleichen Couponsatz von 2 1/2%, der also an der unteren Grenze des historischen Intervalls liegt²⁾, was ebenfalls zu einer ungleichmäßigen Breite des Normalintervalls (1/2% nach unten bzw. 1% nach oben) führt.

2. Die Laufzeit der Wertpapiere als Entscheidungsproblem der Kapitalanleger

Bei einem Planungshorizont³⁾ von einem Jahr (t bis $t + 1$)

1) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 60: "... in consonance with our normal-range construct, investors must be aware of the fact that, in terms of potential bond-price movements, this level of rates leaves less to be feared than hoped. The worst situation that could confront an investor is for him to suffer capital losses corresponding to a rise in interest rates to 5 percent. On the other hand, rates could fall to 2 percent and still lie within the normal range."

2) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 65: "... if interest rates are near the lower bound of the normal range, investors will have more to fear than hope. Possible capital gains will be small, but potential capital losses over the horizon period will loom large."

3) "We noted that several critics have argued that the planning horizons of bond investors were typically much shorter than those suggested by the traditional analysis" (Malkiel, B.G., a.a.O., S. 60),

die im Extremfall den Planungshorizont eines Investors ad infinitum zuläßt, d.h. daß der Investor

sei für alle Laufzeiten (d.h. für alle i) der Ausgangszins für die Wertpapiere des 1. Beispiels $R_{i,t} = 4,5\%$.

Das Entscheidungsproblem für die Investoren besteht darin herauszufinden, welches Wertpapier, d.h. ein Papier welcher Laufzeit sie in $t = t + 0$ (dem Entscheidungszeitpunkt) erwerben sollen, um den Gesamtertrag ihres Portfolios zu maximieren.¹⁾

Da, um die möglichen Ertragssätze berechnen zu können, die Marktpreise der einzelnen Papiere im Zeitpunkt $t+1$ bekannt sein müssen, die sich gemäß den dann geltenden Zinssätzen $R_{i,t+1}$ in diesem Zeitpunkt ergeben, müssen die Investoren bestimmte Annahmen (Erwartungen) hinsichtlich dieser Zinssätze haben.

"... 'must' think that he knows exactly what the rates of interest will be every day from today until 'Kingdom Come'" (Robinson, J., The Rates of Interest, in: *Econometrica*, Bd. 19 (1951), S. 102),

was, wie Malkiel beton, natürlich zu einer "reductio ad absurdum" führt, aber auch "a bit unfair" ist, weil

"... it is perfectly plausible that investors make judgements about possible future prices of consols without estimating future short rates ad infinitum". (Malkiel, B.G., a.a.O., S. 23)

Worauf es in bezug auf den Planungshorizont ankommt, wird von Michaelson klar herausgestellt:

"In the most general case, the end of a portfolio planning horizon is not a fixed point in chronological time marking the liquidation date of the portfolio: it is rather a planning dimension setting the span of time over which alternative courses of action are compared." (Michaelson, J.B., Holding Period Yields on U.S. Government Securities and The Term Structure of Interest Rates, in: *The Journal of Finance*, Bd. 20 (1965), S. 460

1) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 63: "The investor must choose among several acts (that is the array of maturities available to him) where the desirability of each act depends on the state of nature that will prevail."

Bezüglich $R_{1,t+1}$ wird (im Beispiels 1 von Malkiel) eine gleichmäßige Streuung über das Normalintervall

$$0,035 \leq R_{i,t+1} \leq 0,05$$

angenommen.

Malkiel¹⁾ und nach ihm Faßbender²⁾ sagen, daß die gleichmäßige Verteilung mathematisch einer Verteilung auf die beiden Endpunkte 0,035 bzw. 0,05 des Intervalles je mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 gleichwertig ist.

3. Die Errechnung des Gesamtnutzens

Malkiel nimmt für die Entscheidung der Investoren (d.h. für den "repräsentativen" k-ten Investor) zunächst eine "risiko-neutrale" Nutzenfunktion

$$U_k(X) = U(X) = X^3$$

an.

Damit errechnet sich der Gesamtnutzen U_i für den Kauf eines Wertpapiers mit i Jahren Laufzeit nach dem "Bernoulli-Prinzip" zu:

$$U_i = X_i(A) \cdot p(A) + X_i(B) \cdot p(B). \quad 4)$$

1) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 63: "In our case, which has only two states of nature, this is equivalent to attaching a probability of 0.50 to each state."

2) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 56

3) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 62: "There are at least two grounds upon which one could quarrel with this assumption."

In the first place, it is doubtful that utility is linear in money.

Second, and in addition to the possibility of diminishing marginal utility of money payoffs, it may well be that losses per se are especially unpleasant.."

4) Malkiel geht von einem Investor aus, der mit Sicherheit entweder mit dem Eintreten des Ereignisses A bzw. B rechnet, aber die Eintrittswahrscheinlichkeit nicht kennt, und entscheidet sich für das "Bayes-Kriterium", nach dem alle möglichen Eintrittswahrscheinlichkeiten als gleichwahrscheinlich angenommen werden.

Obschon "The standard literature on decision theory suggests a group of criteria to deal with these types of problems", weist Malkiel darauf hin, daß "The

Dabei bezeichnet $X_1(A)$ den Gesamtertrag einer Wertpapieranlage mit i -jähriger Laufzeit, falls in $t + 1$ ein Zinssatz

$$R_{i,t+1} = 5\% \text{ mit der Wahrscheinlichkeit } p(A) = 1/2$$

gilt; $X_1(B)$ bedeutet den Gesamtertrag für den anderen Grenzfall, d.h. für

$$R_{i,t+1} = 3,5\% \text{ mit der Wahrscheinlichkeit } p(B) = \frac{1}{2}.$$

Da in dem Gesamtertrag (d.i. Zinsertrag + Kapitalertrag oder Kapitalverlust) bzw. im Gesamtertragssatz (d.i. Gesamtertrag dividiert durch Kaufpreis) außer den für alle Papiere gleichen Couponzahlungen (4,5 DM für die Papiere des 1. Beispiels) die Kapitalgewinne bzw. -verluste der einzelnen Wertpapiere je nach ihrer Restlaufzeit stecken, ist die Entscheidung der Investoren ausschließlich von den Kapitalgewinnen (bzw. Kapitalverlusten) abhängig.

theoretical justification for the utilization of any one of these is shaky." (Malkiel, B.G., a.a.O., S. 63)

Andere von der Entscheidungstheorie für die gleiche Situation (ungewisse Eintrittswahrscheinlichkeiten) angebotenen Lösungsvorschläge scheiden aus:

die "Wald'sche Minimax-Regel" deshalb, weil ihre Anwendung darauf hinausläuft, daß Investoren nur Papiere mit der kürzesten Laufzeit kaufen werden, wenn nur die Spur eines Verlustes (also einer Kursschwankung) zu befürchten ist;

die "Hurwicz-Regel", die mit einem "subjektiven" Optimismus-Pessimismus-Index arbeitet deshalb, weil der Investor nach der Annahme des Modells bereits bestimmte Erwartungen über die Schwankungsbreite der Zinssätze als Folge der Kursschwankungen hegt;

die "Savage-Niehans-Regel" deshalb, weil ihre Anwendung darauf hinausläuft, daß Investoren in der Regel nur langfristige Papiere kaufen werden, da eine Minimierung des Grades des Bedauerns, also der Nutzendifferenz aus dem maximal möglichen und dem tatsächlichen Nutzen, d.h. der Differenz aus dem Kurs in der Nähe des Tilgungszeitpunktes und dem tatsächlichen Kurs, am Ende der Laufzeit einer Obligation am geringsten ist.

Auch der Unterschied zwischen Gesamtertrag und Gesamtertragssatz spielt hier keine Rolle, da der Kaufpreis für die Papiere aller Laufzeiten wegen des gleichen und mit dem Couponsatz identischen Zinssatzes $R_{i,t} = 4,5\%$ DM 100,00 beträgt, die Papiere also pari stehen.

Bei der Bestimmung der Fristigkeitsstruktur der Effektivzinssätze wird der von Malkiel eingeschlagene Weg, über die Mittlung der Marktpreise die entsprechenden Effektivzinssätze zu errechnen, im folgenden als "mittelbares" Bestimmungsverfahren bezeichnet. Die Bestimmung der Fristigkeitsstruktur unmittelbar aus den Randzinssätzen ohne Umweg über die Mittlung der Marktpreise, die als "unmittelbares" Bestimmungsverfahren bezeichnet werden kann, soll später ausführlich dargestellt werden.¹⁾

Die Kapitalgewinne für die beiden Randzinssätze 5% und 3,5%, also die $X_i(A)$ bzw. die $X_i(B)$, sowie deren gewogene Mittelwerte, die

$$U_i = X_i(A) \cdot p(A) + X_i(B) \cdot p(B)$$

(das sind die "Ausgleichskurse" nach Malkiel) und die daraus resultierende Zinsstruktur sind in den Tabellen von Malkiel²⁾ bzw. von Faßbender³⁾ aufgeführt. Sie werden hier zum Vergleich gegenübergestellt.⁴⁾

1) Vgl. S. 257

2) Vgl. Malkiel, B. ., a.a.O., S. 62, Tabelle 3-2

3) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 57, Tabelle 1-VI-1

4) Vgl. S. 245/246

Table 3-2

Outcomes For Alternative Investment Strategies Over The Planning Horizon

(4½ per cent coupon bonds - interest rates near upper bound of normal range)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	Market price of bond if interest rates rise capital loss to 5% in 1 year ^a	Resulting interest rates fall to 3½% in one year	Market price of bond if interest rates fall to 3½% in one year	Resulting price appreciation (%)	Math. expectation of gain (p:A,B)	Math. expectation of gain among maturities Col. 7	Derived structure of rates from p=0.25
1	100.00 ^b	-	100.00 ^b	-	-	100.00	4.50
1½	99.76	-0.24	100.49	+0.49	+0.13	100.13	4.41
2	99.52	-0.48	100.97	+0.97	+0.25	100.25	4.37
5	98.21	-1.79	103.70	+3.70	+0.96	100.96	4.28
10	96.41	-3.59	107.66	+7.66	+2.04	102.04	4.25
20	93.91	-6.09	113.79	+13.79	+3.35	103.85	4.21
50	90.39	-9.11	123.35	+23.35	+7.12	107.12	4.16
Consol	90.00	-10.00	123.66	+23.66	+9.33	109.33	4.12

^a Price in one year to yield 5 per cent from "present plus one year" to maturity.^b In one year a one-year security matures at par.

Quelle: Malkiel, B.G., a.a.O., S. 62

Tabelle I-IX-I

Ableitung der Zinsstruktur bei einem Couponsatz von 4,5%

Laufzeit n	Kurs in t+1, falls $R_t, t+1$ = 5%	Kapital- verlust A	Kurs in t+1, falls $R_t, t+1$ = 3,5%	Kapital- gewinn B	Erwar- teter Gewinn falls $p(A)$ = 0,5	(6) abdis- kontiert.	Aus- gleichs- kurs in t nach Malkiel	Aus- gleichs- kurs in t	aus (8) resul- tierende Zins- struktur	aus (9) resul- tierende Zins- struktur	p(A) = 0,25
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	100,00	-	100,00	-	-	-	100,00	100,00	4,5	4,5	4,5
1,5	99,76	-0,24	100,49	+0,49	+0,13	0,12	100,13	100,12	4,41	4,46	4,32
2	99,52	-0,48	100,97	+0,97	+0,25	0,24	100,25	100,24	4,37	4,41	4,24
5	98,21	-1,79	103,70	+3,70	+0,96	0,92	100,96	100,92	4,28	4,34	4,04
10	96,41	-3,59	107,66	+7,66	+2,04	1,95	102,04	101,95	4,25	4,30	3,97
20	93,91	-6,09	113,79	+13,79	+3,85	3,68	103,85	103,63	4,21	4,27	3,92
50	90,89	-9,11	123,35	+23,35	+7,12	6,01	107,12	106,81	4,16	4,22	3,88
	90,00	-10,00	128,66	+28,66	+9,33	8,93	109,33	108,93	4,12	4,17	3,84

Quelle der Spalten 1-6, 8 und 10: B.G. Malkiel, The Term Structure of Interest Rates, S. 62

Quelle: Fassbender, H., a.a.O., S. 57

4. Fristigkeits- und Gleichgewichtsstruktur

In seiner Tabelle geht Malkiel von einer Zinsstruktur von $R_{i,t} = 4,5\%$ für Wertpapiere aller Laufzeiten aus mit den angenommenen Couponzahlungen von ebenfalls 4,5%, die "by the arbitrary decree of a deus ex machina"¹⁾ eine Gleichgewichtsstruktur bilden, einer Situation, über die "... investors have collectively made no judgement as to the likelihood of interest rates in general moving up or down."²⁾

Das bedeutet, daß Malkiel von einem horizontalen Verlauf der Ertragskurve für Papiere aller Laufzeiten bis zum Planungshorizont (1 Jahr) ausgeht, was er auch ausdrücklich sagt: "If investors believe that there will be no range of fluctuation during the coming year, then the derived yield curve will be horizontal, which is precisely what we would expect."³⁾

In Spalte 6 der Tabelle von Malkiel erscheinen die Erwartungswerte der Kapitalgewinne (bzw. Kapitalverluste).

Die Spalten 2 bis 5 der Tabelle geben die rechnerisch erwartete Kursänderung bzw. die Kapitalgewinne/Verluste wieder, die sich für jeden Randzinssatz separat ergeben.

Die mathematisch zu erwartende Gleichgewichtsstruktur der Zinssätze (Spalte 8) berechnet sich aus den Kurswerten (Spalte 7), d.h. aus den Kurswerten der "gleichgewichtigen" Ausgangssituation, berichtigt um die mathematisch erwarteten Kapitalgewinne bzw. -verluste.

1) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 60

2) ders., a.a.O., S. 61

3) ders., a.a.O., S. 64

Diese sich auf ein Jahr, also auf eine kurze Periode gründende Erwartung der Zinsstruktur, ist eine Gleichgewichtsstruktur im Sinne eines partiellen Gleichgewichts aus komparativ-statistischer Sicht.¹⁾

Malkiel zieht folgende Schlußfolgerung aus seinem 1. Beispiel. Unter der Voraussetzung, daß die Investoren den mathematischen Erwartungswert des Ertrages für ihren Planungshorizont realisieren wollen, gilt:

1. Liegen wie im 1. Beispiel Malkiels die Zinssätze an der oberen Grenze des Intervalles, dürfen Investoren eher auf Kapitalgewinne hoffen, als daß sie Kapitalverluste befürchten müssen.
2. Sollen die Zinssätze die Zinsstruktur im Gleichgewicht in Abhängigkeit von der Laufzeit widerspiegeln, so folgt wegen der steigenden Kurse ein abfallender Ertragskurvenverlauf mit abnehmenden (negativen) Zuwachsraten.
3. Papiere mit langen Restlaufzeiten insbesondere Konsols werden bevorzugt.

Die Schlußfolgerungen, die Malkiel aus seinem 1. Beispiel zieht, gelten - "vice versa" - für sein 2. Beispiel (Tabelle 3-3)²⁾

1. Liegen die Zinssätze wie im 2. Beispiel Malkiels an der unteren Grenze des Intervalles, müssen die Investoren eher Kapitalverluste befürchten, als daß sie Kapitalgewinne erhoffen können.³⁾
2. Stellen die Zinssätze in Abhängigkeit von der Laufzeit

1) Vgl. Malkiel, B.G., a.a.O., S. 64

2) die wie Tabelle 3.2 aufgebaut ist, wobei allerdings die Verteilung der Erwartungen auf Randwerte nicht gleich ($p(A) = p(B) = 0,5$), sondern verschieden ($p(A) = 0,25$; $p(B) = 0,75$) ist.

Vgl. Tabelle 3-3 auf der nächsten Seite

3) "This is not because investors would expect rates to rise from such a low level (although that might well be the case) but solely because, at that level, the potential price gains and losses inherent in the mathematics of bond-price movements give investors

Outcomes For Alternative Investment Strategies Over The Planning Horizon

(2 $\frac{1}{2}$ Per cent coupon bonds - interest rates near lower bound of normal range)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	Market price of bond if interest rates fall to 2% in one year	Resulting price appreciation (%)	Market price of bond if interest rates rise to 3 $\frac{1}{2}$ % in one year	Resulting capital loss(%)	Math. expectation of loss (p:A,B) p=0.25	Market prices which equalize math. expectation of loss among maturities	Derived structure of exp. of greater fluctuations in short rates	
N		A		B				
1	100.00	-	100.00	-	-	100.00	2.50	2.50
1 $\frac{1}{2}$	100.25	+ 0.25	99.51	- 0.49	- 0.31	99.69	2.71	2.76
2	100.49	+ 0.49	99.03	- 0.97	- 0.61	99.39	2.81	2.87
5	101.91	+ 1.91	96.30	- 3.70	- 2.30	97.70	3.00	3.09
10	104.10	+ 4.10	92.34	- 7.66	- 4.72	95.23	3.05	3.15
20	107.87	+ 7.87	86.21	-13.79	- 8.33	91.62	3.06	3.15
50	115.57	+15.57	76.65	-23.35	-13.62	86.38	3.03	3.12
Consol	125.00	+25.00	71.40	-28.60	-15.20	84.80	2.95	3.07

Quelle: Malkiel, B.G., a.a.O., S. 66

die Zinsstruktur im Gleichgewicht dar, so folgt wegen der fallenden Kurse sin steigender Ertragskurvenverlauf mit abnehmenden Zuwachsraten.

3. Eine Asymmetrie zum 1. Beispiel ergibt sich im 2. Beispiel dadurch, daß bei gleichen Absolutbeträgen der positiven (bzw. negativen) Änderung des Erwartungszinssatzes die jeweils entsprechende Kursänderung in dem Sinne asymmetrisch verläuft, daß die Kursanhebung die Kurssenkung überwiegt.¹⁾

5. Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgrund spezifischer Erwartungen

Haben die Investoren spezifische Erwartungen (expectations proper) in bezug auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Veränderung der Zinsstruktur, d.h. nehmen sie an, daß sich die Zinssätze der Zinsstruktur wahrscheinlich in eine Richtung stärker verändern werden als in eine andere, und machen sie differenziertere Annahmen über den zukünftigen Verlauf der Zinssätze, liegt eine "Entscheidung unter Risiko" vor.

Hält man weiterhin an der Annahme fest, daß die Investoren einen maximalen Nutzen (gemessen durch den

more to fear than hope, given their notion of the normal range." (Malkiel, B.G., a.a.O. S. 67)

Malkiel schränkt seine Aussage bewußt auf den mathematischen Erwartungswert ein und läßt damit nicht eine Deutung i.S. Neumanns zu. Neumann, M., a.a.O., S. 236: "Wenn dann z.B. alle Zinssätze gleich sind und sich am unteren Ende der Bandbreite befinden, so werden die Investoren für die Zukunft eine Erhöhung der Zinssätze erwarten."

- 1) Vgl. Theorem 4: "Price movements resulting from equal absolute (or, what is the same, from equal proportionate) increases and decreases in yield are asymmetric; that is, a decrease in yields raises bond prices more than the same increase in yields lowers prices." (Malkiel, B.G., a.a.O., S. 55)

N.I.)¹⁾ anstreben, wobei

für den Fall A die Wahrscheinlichkeit p und
für den Fall B die Wahrscheinlichkeit $1-p$ gilt,

ergeben sich die neuen Nutzenindices für alle Fälle
 X_i als

$$U_{i,A}(p) + U_{i,B}(1 - p),$$

die sich unter Beibehaltung der Annahme, daß

$$U(X) = X$$

ist, bei der Berechnung des Gesamtnutzens nach dem
"Bernoulli-Prinzip" zu

$$U_i = X_i(A) \cdot p + X_i(B) \cdot (1 - p)$$

vereinfachen.

Nimmt man mit Malkiel für die Eintrittswahrscheinlichkeit
von A bei spezifischen Erwartungen $p(A) = p = 0,25$ und
damit $p(B) = 1 - p = 0,75$ an, dann ergibt sich
die zugehörige (Ausgleichs-) Zinsstruktur
in Beispiel 1 (Tabelle 3-2) aus Spalte 9 und
in Beispiel 2 (Tabelle 3-3) aus Spalte 8.

Wie man aus Tabelle 3-3 sieht, ergibt sich für die an-
genommene Wahrscheinlichkeitsverteilung

$p = p(A) = 1/4$ für eine erwartete Zinssenkung,
 $1 - p = p(B) = 3/4$ für eine erwartete Zinserhöhung
eine steigende Zinsstruktur (d.h. eine Zinsstruktur mit
steigenden Zinssätzen).

Aus der Spalte 8 liest man ab, daß hier der Verlauf nicht

1) N.I. gleich Nutzenindex
Malkiel, B.G., a.a.O., S. 62: "The index chosen has
minus 100 as its zero point. Minus 100 is the worst
possible outcome... No such limitation exists for ...
gains."

monoton ist, da der höchste resultierende Zinssatz sich nicht für Konsols, sondern für Papiere mit einer Laufzeit von ungefähr 20 Jahren in Höhe von 3,06 ergibt; danach nähert sich der resultierende Zinswert asymptotisch "von oben" dem Zinssatz 2,95, dem resultierenden Zinssatz für Konsols.

Bei stetigem Verlauf der Ertragskurve muß also diese Kurve sowohl ein Maximum (Extremum) als auch (für eine späteren Laufzeitwert) einen Wendepunkt aufweisen.¹⁾

6. Die unterschiedliche Berechnung der Ausgleichszinssätze nach Malkiel und Faßbender und ihre Konsequenz für die Entscheidungsbildung

Die Tabelle 1-IX-1 von Faßbender²⁾ gibt - abgesehen von den von ihm hinzugefügten zusätzlichen Spalten (9 und 11) - die Tabelle 3-2 von Malkiel³⁾ wieder.

Schon bei Tabelle 3-1 merkt Malkiel an: "All examples assume semi-annual compounding"⁴⁾, was auch für die bei Malkiel darauffolgenden Tabellen, z.B. für Tabelle 3-2, gilt.

Das heißt nun aber nicht, daß bei der Berechnung der Kurse und Ausgleichszinssätze dieser Tabellen die von Faßbender angegebene Formel⁵⁾ für die halbjährliche Zinszahlung

$$K = C \left(1 + \frac{x}{4}\right)^n \frac{(1 + x)^n - 1}{(1 + x)^n x} + \frac{A}{(1 + x)^n}$$

benutzt werden kann, sondern es muß mit halbjährlichen Zinstermen, nicht nur mit halbjährlichen Zinszahlungen

1) Vgl. S. 249

2) Vgl. S. 246

3) Vgl. S. 245

4) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 57

5) Vgl. Faßbender, H., a.a.O., S. 141

gerechnet werden, also mit der Formel

$$P_0^{(\frac{2n}{2})} = \left[1 + \frac{r_0}{2} \frac{(1 + \frac{r}{2})^{2n} - 1}{\frac{r}{2}} \right] : (1 + \frac{r}{2})^{2n},$$

wo r_0 statt C , $P_0^{(\frac{2n}{2})}$ statt K und 1 für A steht, und nicht mit der von Faßbender angegebenen Formel.

Daß dieses für die genannten Tabellen stimmt, möge am Beispiel der Tabelle 3-1, Zeile 4, von Malkiel bewiesen werden.¹⁾

Malkiel gibt für eine Laufzeit von 8 Jahren einen Nominalzinssatz von 3%, einen Effektivzinssatz (yield-to-maturity) von 4% und den Kurswert 93,211 an.

Es sollen die Anfangskurse P_0 (Marktpreise), bezogen auf den Nennwert 1 statt 100 einander gegenübergestellt werden, und zwar

1. bei jährlicher Zinszahlung und Verzinsung
2. bei halbjährlicher Zinszahlung, aber jährlicher Verzinsung (d.h. die von Faßbender benutzte Formel)
3. bei halbjährlicher Zinszahlung und halbjährlicher Verzinsung.

$$\begin{aligned} \text{Zu 1.} \quad {}_3P_0^{(8)} &= \left[1 + 0,03 \frac{(1 + 0,04)^8 - 1}{0,04} \right] : (1 + 0,04)^8 \\ &= (1 + 0,03 \frac{0,3685689}{0,04}) : 1,3685689 \\ &= 0,9326725 \end{aligned}$$

1) Vgl. Malkiel, B.G., a.a.O., S. 57.

Zu 2.

$$\begin{aligned} {}_3P_O^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) &= \left[1 + 0,03 \frac{(1+0,01)}{0,04} \frac{[(1+0,04)^8 - 1]}{0,04} \right] : (1+0,04)^8 \\ &= (1 + 0,03 \frac{1,01 \cdot 0,3685689}{0,04}) : 1,3685689 \\ &= 0,9346923 \end{aligned}$$

Zu 3.

$$\begin{aligned} {}_3P_O^{(16)}\left(\frac{1}{2}\right) &= \left[1 + \frac{0,03}{2} \frac{[(1 + 0,02)^{16} - 1]}{0,02} \right] : (1 + 0,02)^{16} \\ &= 0,9321115. \end{aligned}$$

Der Tabellenwert von Malkiel ist 93,211, d.h. nur die Formel für die Berechnung nach 3. kann hier angewendet worden sein.

Nicht nur die Marktpreise (Kurswerte) der Tabelle 3-1, sondern auch alle Marktpreise der Tabellen 3-2 (bzw. 3-3) lassen sich nach der Formel für halbjährige Verzinsung (halbjährige Zinszahlung und halbjährige Zinstermine) bestimmen.

Allerdings ist, da die erwarteten Prozentsätze in genauer numerischer Übereinstimmung mit den genannten Tabellen erst vom Jahre $t + 1$ an Gültigkeit haben, bei der Bestimmung der Anzahl der halbjährlichen Zinstermine der Tabellen 3-2 (bzw. 3-3) die Restlaufzeit um 1 Jahr zu verringern.

Z.B. ergibt sich in der 4. Zeile der Tabelle 3-2 bei einer Laufzeit von 5 Jahren (Restlaufzeit ab Jahr $t + 1$ noch 4 Jahre) und einem Couponsatz von 4,5% für alle Laufzeiten sowie einem Effektivzinssatz von 5%:

$$\begin{aligned} (4,5^P_{0,025})_{t+1}^{1)} &= \left[1 + 0,0225 \frac{(1 + 0,025)^8 - 1}{0,025} \right] : (1+0,025)^8 \\ &= 0,9820746. \end{aligned}$$

Der Tabellenwert von Malkiel ist 98,21.

Die von Malkiel in Tabelle 3-2 (Spalten 2 und 4) zusammengestellten Kurse lassen sich für die Wertpapiere aller Laufzeiten nach der obigen Formel²⁾ für halbjährliche Verzinsung zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnen.

In diesem Fall muß die Formel lauten³⁾

$${}_{t+1}P_i = \left[F + \frac{\frac{C}{2} \cdot \left(1 + \frac{{}_{t+1}R_i}{2} \right)^{2i} - 1}{\frac{{}_{t+1}R_i}{2}} \right] : \left(1 + \frac{{}_{t+1}R_i}{2} \right)^{2i}$$

wobei F bei Bezug auf den Nennwert 100 bzw. 1 zu setzen ist.

Ebenso errechnen sich auch die von Malkiel als "market prices equalizing mathematical expectations of gain among maturities"⁴⁾, von Faßbender als "Ausgleichskurse" zur Zeit t bezeichneten (gewogenen) Mittelwerte der Spalte 7 der Tabelle.

Dabei ist für die Bestimmung der zu mittelnden Marktpreise, die zu den Randzinssätzen 3,5% bzw. 5% gehören, die um ein Jahr (Bezugszeitpunkt t+1 statt t) verkürzte (Rest-) Laufzeit zu beachten.

Zum Beispiel ist - wie gezeigt wurde - bei einer Laufzeit von 5 Jahren für die Hochzahl 2i die Zahl 4.2=8 (Halbjahre) einzusetzen.

1) Der Index t+1 an der Klammer bedeutet den Emissions- bzw. Bezugszeitpunkt.

2) Vgl. S. 254

3) Symbolik von Malkiel

4) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 62

Es zeigt sich nun, daß Malkiel für die "derived structure of rates" der Spalte 8 seiner Tabelle im Gegensatz zur Kursbestimmung (Bezugszeitpunkt $t+1$) die gleiche Kursformel aber mit der richtigen Laufzeit ($2i = 10$) - also mit dem Bezugszeitpunkt t statt $t+1$ - als Bestimmungsgleichung für den zum errechneten Ausgleichskurs gehörigen Effektivzinssatz benutzt.

Nach Spalte 7 hat der Ausgleichskurs bei einer Laufzeit von 5 Jahren und bei dem gewählten Normalintervall, zu dem nach Malkiel ein Effektivzinssatz von 4,28% gehört, den Wert 100,96 (auf den Nennwert 1 bezogen 1,0096).

Der von Malkiel angegebene Effektivzins von 4,28% ist aber gerade der auf zwei Dezimalstellen abgerundete Wert (genauer Wert 4,284%), der, auf der rechten Seite der Gleichung für die Halbjahresverzinsung eingesetzt, diese Gleichung erfüllt, wenn an die Stelle von $t+1 P_i$ der Wert 100,96 tritt.

Die Gleichsetzung von

$t P_i^{*1)}$, dem gemittelten Marktpreis oder Ausgabekurs zur Zeit t

mit

$t+1 P_i^{2)}$, dem Ausgleichskurs zur Zeit $t+1$,

die Malkiel offenbar vornimmt, ist nicht gerechtfertigt, und insofern hat Faßbender Recht mit seiner Kritik an Malkiel.³⁾

1)2) Symbolik von Malkiel

3) "Hierzu nimmt Malkiel irrtümlich an, daß die Gewinnerwartung zum ursprünglichen Preis hinzuzuaddieren ist. Dabei berücksichtigt er nicht, daß die Gewinnerwartung erst in $t+1$ realisiert werden kann und daher ein Ertragsausgleich nur zustande kommt, wenn die mit dem von t bis $t+1$ geltenden Einjahreszins abdiskontierte Gewinnerwartung im Preis mitbezahlt wird."

Faßbender, H., a.a.O., S. 59

Wie aber Malkiel schon selber betont hat¹⁾, ist zu beachten, daß die Diskontierung aller Ausgleichskurse von $t+1$ auf t für Wertpapiere aller Laufzeiten mit dem gleichen Diskontierungsfaktor $\frac{1}{1,045}$ (ganzjährige Verzinsung vorausgesetzt) erfolgen muß.

Das Entscheidungsproblem für die Investoren wird durch diese Abzinsung ebensowenig berührt wie durch den für alle Wertpapiere gleichen Couponsatz, dessen Nichtberücksichtigung auch Faßbender explizit als belanglos für die Entscheidungsbildung bezeichnet.²⁾

7. Das unmittelbare Bestimmungsverfahren

- a) Effektivzinssatzberechnung für Konsols mit Hilfe
des direkten (ungewogenen) harmonischen Mittels

Bei der Bestimmung der Fristigkeitsstruktur der Effektivzinssätze aus den gemittelten Marktpreisen (Ausgleichskursen) läßt sich im Prozeß der Mittelwertbildung auch eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung der Erwartungen für die zukünftigen Zinssätze ${}_{t+1}R_1$ als die zunächst vorausgesetzte Gleichverteilung leicht durch Einführung allgemeiner Gewichtungsfaktoren (Wahrscheinlichkeitswerte)

$$w_1 = p(A) \quad \text{und} \quad w_2 = 1 - w_1 = p(B)$$

mitberücksichtigen.

-
- 1) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 64: "We should actually equalize the (discounted) value of the expected price appreciation (depreciation) ... Our approximation was used to permit simplicity of computation."
2) Faßbender, H., a.a.O., S. 58: "Da die Couponzahlung für alle Laufzeiten gleich ist, kann diese bei der Ermittlung der Optimalstrategie unberücksichtigt bleiben."

Hier nun läßt sich durch unmittelbare (harmonische) Zinssatzmittelung eine wesentliche Vereinfachung gegenüber der Berechnung der Effektivzinssätze nach der Methode von Malkiel erzielen, d.h. der Methode, zunächst gemittelte Marktpreise (Ausgleichskurse) zu bestimmen und daraus später die Effektivzinssätze als "derived structure" zu berechnen. Dieses Verfahren wird nachfolgend näher beschrieben. Dabei besteht die Vereinfachung in der Hauptsache im Ausschalten des Umweges über den Ausgleichskurs, so daß z.B. bei den Konsols eine direkte Bestimmung des Effektivzinssatzes aus den Randzinssätzen durch gewichtete direkte harmonische Mittelung möglich ist.

Es seien

r_1 = Zinssatz des unteren und

r_2 = Zinssatz des oberen Randes des Normalintervalles.

Der Effektivzinssatz $r_e (= r_e^{(\infty)}) = r$ für Konsols läßt sich nun z.B. (abweichend von Malkiel) dadurch bestimmen, daß ohne vorherige Berechnung des Ausgleichskurses die Randkurse harmonisch gemittelt werden. Geht man von der Kursgleichung für Konsols ¹⁾ bei Einjahresverzinsung, also von

$$p_o^{(\infty)} = \frac{r_c}{r} \cdot 100 \quad \text{bezogen auf den Nennwert } 100 \quad \text{bzw.}$$

$$p_o^{(\infty)} = \frac{r_o}{r} \quad \text{bezogen auf den Nennwert } 1$$

aus, worin r_o den Couponsatz und $r (= r^{(\infty)})$ den Effektivzinssatz bezeichnet, so muß der Prozeß der Mittelwertbildung nach Malkiel (Ausgleichskursbestimmung) zu folgender Gleichsetzung führen

$$p_o^{(\infty)} = (p_{o1}^{(\infty)} + p_{o2}^{(\infty)}) : 2.$$

1) Nach der Bezeichnungsweise des Verfassers handelt es sich bei der Kursgleichung für Konsols um "gequerte" Kursgrößen, denn

$$p_o^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{p_o^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r_o}{r} + \frac{1 - \frac{r_o}{r}}{(1+r)^n}}{2} = \frac{r_o}{r}.$$

Die entsprechende "ungequerte" Kursgröße kann außer-

Da $p_0^{(\infty)}$ einerseits $= \frac{r_0}{r}$ und andererseits

$$p_{0,12}^{(\infty)} = (p_{01}^{(\infty)} + p_{02}^{(\infty)}) : 2 = \frac{r_0}{r_1} \cdot w_1 + \frac{r_0}{r_2} \cdot w_2 \text{ ist,}$$

ergibt sich

$$\frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{r_1} \cdot w_1 + \frac{r_0}{r_2} \cdot w_2 .$$

Beide Seiten der vorstehenden Gleichung lassen sich durch r_0 (> 0) kürzen, was bedeutet, daß der auf Malkiel'sche Weise über den Ausgleichkurs ermittelte Effektivzinssatz r ($= r^{(\infty)}$), wenn man vom Anfangsjahr t bis $t+1$ absieht, vom Couponsatz r_0 unabhängig ist.

Nach Kürzung durch r_0 erhält man für den Effektivzinssatz r ($= r^{(\infty)}$) folgende einfache Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2} .$$

Für $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ nimmt diese Gleichung als Bestimmungsgleichung für r ($= r^{(\infty)}$) die Form

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{r_1} + \frac{\frac{1}{2}}{r_2} \quad \text{oder} \quad \frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \text{an.}$$

Das aber ist die Form der Definitionsgleichung von r ($= r^{(\infty)}$) als dem direkten harmonischen Mittel¹⁾ von r_1 und r_2 .

dem nur schwer definiert werden, da praktisch keine unendliche Zinssatzfolge aus Einperiodenterminzinssätzen existiert. Im folgenden wird zur Vereinfachung der Schreibweise, da bei konstanten Werten der Einperiodenterminzinssätze ohnehin die Begriffe "Einperiodenterminzinssatz" und "Effektivzinssatz" zusammenfallen, für Konsols das Querungszeichen bei den Kursgrößen fortgelassen.

1) Vgl. Abschnitt über Mittelwertbildung, S. 115

Man kann also sagen, daß der Effektivzinssatz $r (= r^{(\infty)})$, d.h. der Effektivzinssatz für Konsols bei gleichmäßiger Wahrscheinlichkeitsverteilung über das gesamte Normalintervall und bei gleicher Breite der beiden Teilstreifen das ungewogene (d.h. je mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ bewertete) harmonische Mittel der Randzinssätze r_1 und r_2 ist.

b) Effektivzinssatzberechnung bei Konsols mit Hilfe des direkten (gewogenen) harmonischen Mittels

Bei der Definition des gewogenen (direkten) harmonischen Mittels geht man zweckmäßig von der Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2}$$

aus. Diese Gleichung läßt sich als Bestimmungsgleichung für den Effektivzinssatz $r (= r^{(\infty)})$ auffassen, und zwar wird dadurch $r (= r^{(\infty)})$ als (direktes) gewogenes harmonisches Mittel¹⁾ aus r_1 und r_2 definiert.

Das Malkiel'sche Beispiel mit dem Normalintervall

$$3,5\% \leq R_i \leq 5\%$$

ergibt nach dem hier vorgeschlagenen und als unmittelbar bezeichneten Bestimmungsverfahren des Effektivzinssatzes $r (= r^{(\infty)})$, also bei Verwendung des (direkten) ungewogenen harmonischen Mittels aus den Randzinssätzen $r_1 = 0,035$ und $r_2 = 0,05$ den Effektivzinssatz

$$r^{(\infty)} = \frac{2 \cdot 0,035 \cdot 0,05}{0,035 + 0,05} = \frac{0,0035}{0,085} \\ = 0,0411765.$$

Dieser Wert ist mit dem Zahlenwert der letzten Zeile der Tabelle (3-2) von Malkiel, nämlich 4,12, identisch.

1) Vgl. S.115 ff.

Als "ungewogen" wurde der obige harmonische Mittelwert deshalb bezeichnet, weil für die Wahrscheinlichkeit der Intervallränder r_1 und r_2 die gleiche Größe

$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ angenommen wurde. Es handelt sich also um den Fall der gewöhnlichen harmonischen Mittelwertbildung. Sind nun die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Randwerte nicht gleich, d.h. werden die Randzinssätze r_1 und r_2 bei ungleichmäßiger Wahrscheinlichkeitsverteilung der Erwartungswerte über das betreffende Intervall entsprechend mit den Bewertungen $w_1 = 0,75$ und $w_2 = 0,25$ gewichtet, so ergibt sich der Effektivzinssatz $r (= r^{(\infty)})$ aus der Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{3}{4}}{0,035} + \frac{\frac{1}{4}}{0,05} ,$$

d.i. der vom Verfasser sogenannte (direkte) gewogene harmonische Mittelwert

$$r = r^{(\infty)} = \frac{4 \cdot 0,035 \cdot 0,05}{3 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,035} = \frac{0,007}{0,185} = 0,0378378$$

Er stimmt mit dem entsprechenden Tabellenwert 3,78 bei Malkiel (9. Spalte, Tabelle 3-2) völlig überein.

Die oben benutzte Formel für den Anfangskurs $p_o^{(\infty)}$ eines Konsols¹⁾ ergibt sich aus der von Malkiel für beliebiges n angegebenen allgemeinen Kursformel

$$t_n^P = \frac{C}{i} + \frac{F - \frac{C}{i}}{(1+i)^n}$$

beim Übergang von endlichem zu unendlichem n , also für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^P = t_{\infty}^P \quad \text{zu} \quad t_{\infty}^P = \frac{C}{i} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F - \frac{C}{i}}{(1+i)^n} ,$$

1) $p_o^{(\infty)} = \frac{r_o}{r}$

wo das 2. Glied der rechten Seite der letzten Gleichung mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Damit ergibt sich für Konsols auch nach Malkiel die Gleichung $tP_{\infty} = \frac{C}{i}$, die durch Ersetzung von C durch r_0 und von i durch r in die vom Verfasser benutzte Formel übergeht.

c) Bestimmung des Effektivzinssatzes mit Hilfe des indirekten (ungewogenen) harmonischen Mittels

Für das unmittelbare Bestimmungsverfahren (Zinssatzberechnung ohne zuvorige Bestimmung der zu den Randzinssätzen gehörigen Marktpreise und deren Ausgleichskurse) ergibt auch für die ersten Einperioden-Effektivzinssätze, d.h. für den jeweils ersten Zinssatz der betreffenden Fristigkeitsstruktur - bezogen auf den Zeitpunkt $t+1$ - eine vereinfachte Berechnungsmöglichkeit, die als unmittelbares Bestimmungsverfahren zweckmäßig bezeichnet wird, wogegen man das von Malkiel selbst benutzte Rechenverfahren mit Hilfe der Ausgleichskurse als mittelbares Bestimmungsverfahren benennen kann. Dabei ist zu berücksichtigen, daß bei der Bestimmung der Marktpreise der Tabelle 3-2 mit Hilfe der Formel für die halbjährliche Verzinsung wegen des Bezugszeitpunktes $t+1$ mit einer Restlaufzeit von $n-1$ Jahren gerechnet wurde, während bei der Berechnung der zu den Ausgleichskursen gehörigen Zinssätze der Fristigkeitsstruktur, da diese auf den Zeitpunkt $t = t + 0$ statt auf $t + 1$ bezogen werden, eine Laufzeit von n Jahren benutzt worden ist.

Geht man von ganzjähriger Verzinsung aus, ergeben sich für eine Periode, also für das Jahr $t + 1$ bis $t + 2$, folgende Kursformeln

$$\begin{aligned}
 & 1) \\
 & (p_o^{(1)})_{t+1} = \frac{1 + r_o}{1 + (r_e^{(1)})_{t+1}} \\
 & 2) \\
 & (p_{oa}^{(1)})_{t+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + r_o}{1 + r_1} + \frac{1 + r_o}{1 + r_2} \right]
 \end{aligned}$$

Das $r_e = (r_e^{(1)})_{t+1}$ im Nenner der rechten Seite von $(p_o^{(1)})_{t+1}$ stellt dabei den gesuchten Effektivzinssatz für das Jahr $t+1$ bis $t+2$ dar. Die Gleichsetzung der beiden $p_o^{(1)}$ -Werte (Kurswerte)

$$(p_o^{(1)})_{t+1} = (p_{oa}^{(1)})_{t+1}$$

liefert auch hier wie bei der Kursgleichung die Bestimmungsgleichung für den Effektivzinssatz $(r_e^{(1)})_{t+1}$.

Es lassen sich beide Seiten dieser Gleichung durch $1 + r_o$ kürzen. Auch hier ist also der Malkiel'sche Effektivzinssatz, d.h. der Effektivzinssatz, der zum Ausgleichskurs der gemittelten Randkurse gehört, vom Couponsatz r_o unabhängig.³⁾

-
- 1) Der Index $t+1$ soll den Bezugszeitpunkt bezeichnen.
 2) Index a soll die arithmetische Mittlung der Quotienten

$$(p_{oi}^{(1)})_{t+1} = \frac{1+r_o}{1+r_i} \quad (i=1,2) \quad \text{bezeichnen.}$$

- 3) Diese rechnerische Unabhängigkeit vom Couponsatz r_o ist für Konsols und - falls man von der Vorperiode t bis $t+1$ absieht - für die Einperiodenlaufzeit eigentümlich. Sie gilt aber nicht für andere Laufzeiten, z.B. nicht für die Zweiperiodenlaufzeit.

Aus den Definitionsgleichungen für die ungequerten

$p_o^{(2)}$ -Werte

$$p_{o1}^{(2)} = \frac{1+r_o}{(1+r_1)^2} \left[1+(1+r_1) \right] \quad \text{und} \quad p_{o2}^{(2)} = \frac{1+r_o}{(1+r_2)^2} \left[1+(1+r_2) \right]$$

folgt bei der Malkiel'schen Mittlung und bei Gleichgewichtung ($w_1=w_2=0,5$), wenn man diesen Mittelwert mit

$p_{oa}^{(2)}$ bezeichnet

$$p_{oa}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + r_o(2+r_1)}{(1+r_1)^2} + \frac{1 + r_o(2+r_2)}{(1+r_2)^2} \right],$$

Man erkennt, daß hier nicht - wie bei den Konsols - der Effektivzinssatz das direkte gewogene harmonische Mittel aus den Randzinssätzen r_1 und r_2 ist. Vielmehr stellt der Zinsfaktor $(1 + r_e)$ das gewogene oder ungewogene harmonische Mittel aus den Zinsfaktoren $(1 + r_1)$ und $(1 + r_2)$ dar, was als indirekte harmonische Mittlung der Randzinssätze r_1 und r_2 bezeichnet wurde.

Mit $r_1 = 0,035$ und $r_2 = 0,05$, also $(1 + r_1) = 1,035$ und $(1 + r_2) = 1,05$ ergibt sich für

$$r = r_e^{(1)} \quad (\text{genauer } (r_e^{(1)})_{t+1}):$$

$$\frac{1}{1 + r} = \frac{1}{1 + (r_e^{(1)})_{t+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1,035} + \frac{\frac{1}{2}}{1,05},$$

wo zunächst wieder $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ gesetzt wurde, also der Fall der ungewogenen indirekten harmonischen Mittlung vorliegt. Daraus findet man

$$1 + (r_e^{(1)})_{t+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,035 \cdot 1,05}{1,035 + 1,05}$$

$$= 1,04246$$

$$r_e^{(1)} = 0,042446, \text{ in Prozent rund } 4,24\%.$$

während sich für die gequerte Kursgröße $\overline{p}_0^{(2)}$ mit $r (= r_e^{(2)})$ die Gleichung

$$\overline{p}_0^{(2)} = \frac{1 + r_0(2+r)}{(1+r)^2}$$

ergibt. Gleichsetzung von $\overline{p}_0^{(2)}$ mit $\overline{p}_0^{(2)}$ liefert für r die Bestimmungsgleichung

$$\frac{1+r_0(2+r)}{(1+r)^2} = \frac{(1+r_1)^2 + (1+r_2)^2 + r_0 \left[(2+r_1)(1+r_2)^2 + (2+r_2)(1+r_1)^2 \right]}{2 \cdot (1+r_1)^2 \cdot (1+r_2)^2}$$

die beim "Überkreuz"-Multiplizieren in eine Bestimmungsgleichung 2. Grades für r übergeht.

Die Zähler der obigen Gleichung sind i.a. nicht ganzzahlig in einander enthalten, also nicht durch

$1 + r_0 \cdot C^{(n)}$, hier $C^{(n)} = C^{(2)} = 2 + r$, teilbar; es besteht also auch hier keine Unabhängigkeit des Malkiel'schen Effektivzinssatzes vom Couponsatz.

d) Bestimmung des Effektivzinssatzes für die Zweiperioden-Laufzeit (Zeitraum t bis $t+2$) und für den Einperioden-Effektivzinssatz bei unterschiedlicher Bewertung der Randzinssätze

Da im Beispiel von Malkiel aus Tabelle 3-2 für das Jahr t bis $t+1$ ein Marktzins von 4,5% (gleichbleibend für alle Laufzeiten) angenommen wurde, und erst im 2. Jahr ($t+1$ bis $t+2$) der obige durch harmonische Mittlung gefundene Effektivzinssatz von 4,24% gilt, liegt es nahe, für den Effektivzinssatz der beiden Jahre (t bis $t+2$) das arithmetische Mittel aus den Zinsen des 1. und 2. Jahres zu wählen. Allerdings muß man dabei auf eine Fehlerquelle achten, die darin besteht, daß bei Malkiel halbjährlich verzinst wird, während bei der obigen Berechnung des Effektivzinssatzes $(r_e)_{t+1}$ mit den Zinssätzen für ganzjährige Verzinsung gerechnet wurde.

Für die Laufzeit von zwei Jahren ergibt sich bei arithmetischer Mittlung ein Effektivzinssatz (Ausgleichszinssatz) von $\frac{4,5 + 4,24}{2} = 4,37\%$.

Das ist genau der Wert aus Spalte 8 der Tabelle von Malkiel (Tab. 3-2) für eine Laufzeit von zwei Jahren.

Richtiger müßte hier statt des arithmetischen Mittels aus 4,5% und 4,2446% der sogenannte, d.h. der indirekte geometrische Mittelwert von

$$\begin{aligned} & 1 + 0,045 \quad \text{und} \quad 1 + 0,042446, \\ \text{nämlich } & \sqrt{1,045 \cdot 1,042446} - 1 = 1,0437221 - 1 \\ & = 0,0437221, \text{ abgerundet } 0,0437, \end{aligned}$$

benutzt werden, was aber am Zahlenwert des Ausgleichszinssatzes nichts ändert.

Die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten hinsichtlich der Erwartungen der Investoren werden von Malkiel in seinem Normalintervall-Modell u.a. in der Weise berücksichtigt, daß er diese Erwartungsunterschiede bezüglich der ab $t+1$ gültigen Zinssätze durch Verwendung zweier

verschiedener Gewichtungsfaktoren w_1 und w_2 Rechnung trägt. Dieses Verfahren wird in der nachfolgenden Zusammenstellung über die Möglichkeiten der Berücksichtigung unterschiedlicher Erwartungen der Investoren behandelt.

Die numerische Durchführung mit den Zahlenwerten des obigen Beispiels geschieht nachfolgend mittels eines Bestimmungsverfahrens, das gegenüber dem von Malkiel selbst benutzten Verfahren den Vorteil größerer Einfachheit besitzt. Es wird dabei hauptsächlich von den Eigenschaften des gewogenen (indirekten) harmonischen Mittelwertes $(r_e^{(1)})_{t+1}$ der Randzinssätze $r_1 = 0,035$ und $r_2 = 0,05$ Gebrauch gemacht. Die Gewichtung erfolgt mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfaktoren $w_1 = 0,75$ (für r_1) bzw. $w_2 = 0,25$ (für r_2).

Die Gleichung für das gewogene indirekte harmonische Mittel $(r_e^{(1)})_{t+1}$ von r_1 und r_2 lautet

$$\frac{1}{1+(r_e)_{t+1}} = \frac{\frac{3}{4}}{1,035} + \frac{\frac{1}{4}}{1,05} ,$$

d.h.

$$1 + (r_e^{(1)})_{t+1} = \frac{1,035 \cdot \frac{1}{4} + 1,05 \cdot \frac{3}{4}}{4,185} = 1,0387096.$$

Bei ganzjähriger Verzinsung ist also der effektive Jahreszinssatz des zweiten Jahres 3,87%, was mit den 4,5% des ersten Jahres den (arithmetischen) Mittelwert (Ausgleichszinssatz) von 4,185% für beide Jahre ergibt (entsprechend dem Tabellenwert 4,18 in Spalte 9 der Tab. 3-2 bei Malkiel).

8. Die verschiedenen Möglichkeiten der Berücksichtigung unterschiedlicher Teilstreifenbreiten und unterschiedlicher Wahrscheinlichkeiten

Eine Berücksichtigung unterschiedlicher Erwartungen der verschiedenen Investoren ist im Malkiel-Modell (Normal-

intervall-Modell) auf verschiedene Weise möglich:

1. durch die unterschiedliche Breite des oberen bzw. unteren Teilintervalles, in die das Normalintervall durch den Ausgangszinssatz geteilt wird (insbesondere dann, wenn das Normalintervall an der oberen oder unteren Grenze des historischen Intervalls liegt),
2. durch Verwendung unterschiedlicher Gewichtungsfaktoren entsprechend der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung im oberen bzw. unteren Teilintervall
 - a) bei gleicher Teilstreifenbreite
 - b) bei verschiedenen Teilstreifenbreiten
3. durch Einführung eines größeren Schwankungsbereichs der Randzinssätze im Sinne stärkerer Schwankungen bei den kürzeren Laufzeiten und schwächeren Schwankungen bei den längeren Laufzeiten. Das entspricht im übrigen der auch empirisch feststellbaren mathematischen Tatsache, daß der Mittelwert (hier der geometrische) einer Folge von Zinssätzen weniger schwankt als diese Zinssätze selber,
4. durch die Möglichkeit der stärkeren Berücksichtigung von Kapitalverlusten gegenüber Kapitalgewinnen durch Variation der Nutzenfunktion, etwa in der Weise, daß für die Investitionsentscheidung der Investoren eine Nutzenfunktion zugrundegelegt wird, "welche die Kapitalverluste als doppelt so hohen Nutzenentgang bewertet"¹⁾, wie gleich hohe Kapitalgewinne als Nutzen, d.h. an die Stelle der Nutzenfunktion

$$U(X) = X$$

tritt die Nutzenfunktion

$$U(X) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

1) Faßbender, H., a.a.O., S. 61

a) Der Effektivzinssatz für Konsols in Abhängigkeit von der Breite der Teilstreifen und der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die Ränder des Normalintervalls

Die Unabhängigkeit des Effektivzinssatzes r_e , also des gewogenen direkten bzw. indirekten harmonischen Mittels vom Couponsatz r_o bei gegebenen Randzinssätzen kommt für Papiere einjähriger Laufzeit und Konsols darin zum Ausdruck, daß einerseits die Gleichung (unter der Voraussetzung $r_o > 0$)

$$\frac{1 + r_o}{1 + r_e} = \frac{(1 + r_o) \cdot w_1}{1 + r_1} + \frac{(1 + r_o) \cdot w_2}{1 + r_2} \quad \text{durch } (1 + r_o),$$

andererseits die Gleichung

$$\frac{r_o}{r_e} = \frac{r_o}{r_1} + \frac{r_o}{r_2} \quad \text{durch } r_o \text{ teilbar ist.}$$

Für die Periodenlänge 1 fallen die Begriffe Effektivzinssatz r_e und Marktzinssatz r_1 ohnehin zusammen, da der Einperiodenterminzinssatz r_1 (identisch mit dem langfristigen Zinssatz R_1 der Periodenlänge 1) kein Erwartungswert, sondern ein im Marktbereich realisierter Zinssatz ist und aus

$$p_o^{(1)} = \frac{1 + r_o \cdot (1)}{1 + r_1}$$

sowie

$$\overline{p_o^{(1)}} = \frac{1 + r_o \left[\frac{(1 + r_e)^1 - 1}{r_e} \right]}{(1 + r_e) r_e} = \frac{1 + r_o \cdot (1)}{1 + r_e}$$

unabhängig vom Couponsatz r_o

$$r_1 = r_e$$

folgt.

Die Unabhängigkeit des Effektivzinssatzes $(r_e^{(1)})_{t+1}$ von r_o bedeutet aber noch nicht die Unabhängigkeit des zum

Malkiel'schen Ausgleichskurs gehörigen Zweiperioden-Effektivzinssatzes $(r_e^{(2)})_t$ zum Zeitpunkt t vom Couponsatz r_0 , da - wie gezeigt - im Falle einer einjährigen Laufzeit (von $t+1$ bis $t+2$) noch der für das Anfangsjahr (t bis $t+1$) geltende Zinssatz $r_1 = (r_e^{(1)})_t$, der mit dem Couponsatz r_0 übereinstimmt, zu berücksichtigen ist.

So mußte der effektive Jahreszinssatz des zweiten Jahres $(r_e^{(1)})_{t+1} = 3,87\%$, der durch Bildung des gewogenen harmonischen Mittels der zu den Randzinssätzen $3,5\%$ und 5% gehörigen Zinsfaktoren $1,035$ bzw. $1,05$ erhalten wurde, noch mit dem Zinssatz $r_1 = 4,5\%$ des Anfangsjahres (identisch mit dem Couponsatz $r_0 = 4,5\%$ des betreffenden Papierses) arithmetisch (richtiger geometrisch) gemittelt werden, um den Tabellenwert (Ausgleichszinssatz $(r_e^{(2)})_t$) von Malkiel zu erhalten.

Bei Konsols spielt natürlich der Zinssatz des ersten Jahres (so wenig wie der Zinssatz irgendeinen anderen Jahres) keine Rolle, d.h. $(r^{(oo)})_{t+1} = (r^{(oo)})_t$.

Da der Couponsatz r_0 im Malkiel'schen Normalintervall-Modell gleich dem Marktzinssatz $r_1 = (r_e^{(1)})_t$ ist, ist er insofern auch für den Zinssatz tR_2 und tR_{oo} der Laufzeitstruktur von Bedeutung, denn die Festlegung des Normalintervalles geht vom Marktzinssatz, also von $r_1 = r_0$ aus. Der Couponsatz stellt also den "Basissatz" dar, um den sich die unterschiedlichen Zinserwartungen der Anleger nach beiden Seiten hin verteilen, wodurch erst das sogenannte Normalintervall mit seinen Randwerten $r_1 < r_0$ und $r_2 > r_0$ entsteht.

Mathematisch stellt man den oberen Randwert zweckmäßig

als Summe $r_2 = r_0 + \Delta_2$, den unteren Randwert r_1 zweckmäßig als Differenz $r_1 = r_0 - \Delta_1$ aus dem Couponsatz r_0 und einem Zusatzglied i ($i=1,2$) dar.

Der Ausgleichszinssatz für Konsols $r^{(\infty)}$ läßt sich bei dem unmittelbaren Bestimmungsverfahren mit Hilfe des direkten gewogenen harmonischen Mittels berechnen und ist abgesehen vom Bezugszeitpunkt (t bzw. $t+1$) mit ihm identisch.

Die Bestimmungsgleichung für $r^{(\infty)}$ lautet also

$$\frac{1}{r^{(\infty)}} = \frac{w_1}{r_0 - \Delta_1} + \frac{w_2}{r_0 + \Delta_2}$$

wo w_1 und w_2 die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für den unteren bzw. oberen Rand des Normalintervalles bedeuten. Da für die Wahrscheinlichkeiten w_i ($i=1, \dots, n$) die Beziehung $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, also für w_1 und w_2 die Gleichung $w_1 + w_2 = 1$ gelten muß, erhält man für $r^{(\infty)}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} r^{(\infty)} &= \frac{(r_0 - \Delta_1)(r_0 + \Delta_2)}{w_1 \cdot r_0 + w_1 \Delta_2 + w_2 \cdot r_0 - w_2 \cdot \Delta_1} \\ &= \frac{r_0^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \cdot r_0 - \Delta_1 \cdot \Delta_2}{r_0 + (w_1 \cdot \Delta_2 - w_2 \cdot \Delta_1)} \end{aligned}$$

Für den Fall gleicher oberer und unterer Teilstreifenbreite ($\Delta_2 = \Delta_1 = \Delta$) verschwindet das zweite Glied des Zählers, und man erhält

$$r^{(\infty)} = \frac{r_0^2 - \Delta^2}{r_0 + (w_1 - w_2)}$$

Sind w_1 und w_2 außerdem noch gleich, ist also $w_1 = \frac{1}{2}$ und $w_2 = \frac{1}{2}$ (Fall des ungewogenen harmonischen Mittels), so ergibt sich

$$r^{(\infty)} = r_0 - \frac{\Delta^2}{r}$$

So findet man z.B. für $r_0 = 4,5\% = 0,045$ und
 $= 0,005$ für $r^{(\infty)}$ den Wert

$$r^{(\infty)} = 0,045 - \frac{0,000025}{0,045} = 0,04 \text{ oder } 4,4\%.$$

Man sieht, daß bei gleicher Breite des oberen bzw. des unteren Teilstreifens der Grenzwert der zugehörigen Laufzeitstruktur umso weniger vom Ausgangswert (Coupon-satz = Zinssatz des ersten Jahres) abweicht, je kleiner die Streifenbreite ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$) und je größer der Ausgangszinssatz (Couponsatz) ist und weiter, daß bei gleicher Streifenbreite und gleicher Warscheinlichkeitsverteilung über die gesamte Streifenbreite der Grenzwert der Ertragskurve (effektiver Konsolzinssatz) unter dem Anfangszinssatz liegt (negatives Vorzeichen von

$\frac{\Delta^2}{r_0}$) der Grenzkurs für Konsols also über dem Anfangskurs. Sind zwar die obere und untere Streifenbreite Δ_2 bzw. Δ_1 ungleich, ist aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Gesamtstreifen gleich ($w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$), so vereinfacht sich die allgemeine Formel für $r^{(\infty)}$ zu:

$$r^{(\infty)} = \frac{r_0^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \cdot r_0 - \Delta_1 \Delta_2}{r_0 + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)}.$$

Nach Ausklammern von r_0 im Zähler läßt dieser sich folgendermaßen zerlegen

$$r^{(\infty)} = r_0 \left[\frac{r_0 + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)}{r_0 + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)} + \frac{\frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_2}{r_0}}{r_0 + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)} \right]$$

oder

$$r^{(\infty)} = r_0 \left[1 + \frac{\frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_2}{r_0}}{r_0 + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)} \right]$$

Klammert man im Nenner des Hauptbruches der eckigen Klammer r_0 aus und multipliziert das r_0 vor der

eckigen Klammer in diese Klammer hinein, so erhält man

$$r^{(\infty)} = r_0 + \frac{\frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_2}{r_0}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{r_0}}$$

Je nach Vorzeichen des Bruches der rechten Seite ist also entweder $r^{(\infty)} > r_0$ oder $r^{(\infty)} < r_0$.

Für $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ geht der Bruch der rechten Seite wieder in

$$- \frac{\Delta^2}{r_0} \quad \text{über.}$$

b) Der Einperioden-Effektivzinssatz in Abhängigkeit von
der Breite der Teilstreifen und der Gewichtsverteilung
auf die Ränder des Normalintervalls

In entsprechender Weise wie bei den Konsols ergibt sich der Effektivzinssatz $r = (r_e^{(1)})_{t+1}$ für Papiere mit zweijähriger Laufzeit (d.h. einjährige Laufzeit vom Bezugspunkt $t+1$ aus gerechnet) für das zweite Jahr durch Bildung des gewogenen harmonischen Mittels

$$\frac{1}{1+r} = \frac{w_1}{1+r_1} + \frac{w_2}{1+r_2}$$

oder

$$1+r = \frac{(1+r_1)(1+r_2)}{w_1(1+r_2) + w_2(1+r_1)}.$$

Setzt man für die Randzinssätze r_1 und r_2 wieder

$$r_1 = r_0 - \Delta_1$$

und

$$r_2 = r_0 + \Delta_2,$$

so ergibt sich

$$1 + r = \frac{(1+r_0 + \Delta_2)(1+r_0 - \Delta_1)}{w_1(1+r_0) + w_1 \Delta_2 + w_2(1+r_0) - w_2 \Delta_1}$$

$$= \frac{(1+r_0)^2 + (1+r_0)(\Delta_2 - \Delta_1) - \Delta_1 \Delta_2}{(1+r_0) + (w_1 \Delta_2 - w_2 \Delta_1)},$$

was durch Ausklammern von $(1 + r_0)$ im Zähler übergeht in

$$1 + r = (1+r_0) \frac{(1+r_0) + (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{\Delta_1 \Delta_2}{1+r_0}}{(1+r_0) + (w_1 \Delta_2 - w_2 \Delta_1)}$$

Hier ist noch eine Vereinfachung des Hauptbruches dadurch möglich, daß man ihn durch $1 + r_0$ kürzt. Falls $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ ist, läßt sich der Zähler so zerlegen, daß sich der Summand 1 abspalten läßt:

$$\frac{(1 + r_0) + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)}{(1+r_0) + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)} + \frac{\frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{\Delta_1 \Delta_2}{1 + r_0}}{(1+r_0) + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)}.$$

Für $1 + r$ erhält man dann

$$1 + r = (1+r_0) \left[1 + \frac{\frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{\Delta_1 \Delta_2}{1 + r_0}}{(1+r_0) + \frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)} \right]$$

Ausklammern von $1 + r_0$ im Nenner des Hauptbruches der eckigen Klammer und Hereinmultiplizieren des Faktors $(1 + r_0)$ in diese Klammer ergibt

$$1 + r = 1 + r_0 + \frac{\frac{1}{2} (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{\Delta_2 \cdot \Delta_1}{1 + r_0}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{1 + r_0}}.$$

Wieder hängt es vom Vorzeichen des Hauptbruches der rechten Seite ab, ob

$$r > r_0 \quad \text{oder} \quad r < r_0 \quad \text{ist.}$$

Für $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ vereinfacht sich der Bruch wieder zu

$$- \frac{\Delta^2}{1+r_0},$$

so daß also in diesem Falle

$$1 + r = (1 + r_0) - \frac{\Delta^2}{(1+r_0)}$$

wird.¹⁾

Der Effektivzinssatz der Zinsstruktur (für eine Laufzeit von 2 Jahren) gemäß Spalte 8 der Tabelle 3-2 von Malkiel ergibt sich wieder durch Bilden des geometrischen (oder näherungsweise arithmetischen) Mittels aus dem gegebenen Couponsatz $r_0 = r_1 = (r_e^{(1)})_t$ (im 1. Beispiel von Malkiel 4,5%) und

$$r = (r_e^{(1)})_{t+1}, \text{ also } {}_tR_2 = \left[(r_e^{(1)})_t + (r_e^{(1)})_{t+1} \right] : 2,$$

genauer
$${}_tR_2 = \sqrt[2]{\left[1 + (r_e^{(1)})_t \right] \left[1 + (r_e^{(1)})_{t+1} \right]} - 1$$

9. Der Ausgleichskurs des Normalintervall-Modells von Malkiel in Abhängigkeit von der Laufzeit (Kurs/Laufzeit-Kurve)

Bei der Betrachtung der Tabelle 3-3 von Malkiel wurde festgestellt, daß der Verlauf der Ertragskurve für eine Laufzeit von etwa 20 Jahren einen maximalen Effektivzinssatz ${}_tR_{20} = 3,06\%$ aufweist und der Effektivzinssatz für Konsols mit 2,95% um 0,11 Prozentpunkte unter diesem Maximalwert von 3,06% liegt.

Malkiel selbst nennt dieses Ergebnis ein "curious result" in Anbetracht der Tatsache, daß "the general shape of the yield curve is ascending." Er schreibt weiter: "This is

1) Ist Δ_2 zwar nicht gleich Δ_1 , aber ungefähr gleich

Δ_1 , so läßt sich der Nenner in eine verhältnismäßig gut konvergierende (alternierende) Potenzreihe nach Potenzen von $\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2 \cdot (1+r_0)}$ entwickeln.

not a peculiarity of the particular numerical example chosen. The same result will be obtained for any p , $0,01 \leq p \leq 1$ ¹⁾, that is, except where there is essentially no prospect for gain. This 'anomaly' results solely from the mathematics of bond prices."²⁾

Nun ist bei dem bekannten Zusammenhang zwischen Kurs (hier Ausgleichskurs $p_{oa}^{(n)}$) und der Höhe des jeweils zugehörigen Effektivzinssatzes für die gleiche Laufzeit, der die Form der Ertragskurve bestimmt, zu vermuten, daß auch die Ausgleichskurs-Kurve (bei Malkiel price-curve³⁾) einen Extremwert und dann auch (wegen der asymptotischen Annäherung an den Konsolkurs) einen Wendepunkt aufweisen wird. Das ist auch der Fall, wie man durch Differentiation von $p_{oa}^{(n)}$ nach n zeigen kann.

Die Bedingungen für das Auftreten eines Extremums bei der Ausgleichskurs-Kurve ($p_{oa}^{(n)}$ -Kurve in Abhängigkeit von n) sind:

Nullwerden der ersten Ableitung (notwendige Bedingung) und

Nichtverschwinden der zweiten Ableitung bei gleichzeitigem Verschwinden der 1. Ableitung an der Stelle des Extremums (hinreichende Bedingung).

Zur Erleichterung der Rechnung ist es zweckmäßig, hier nicht die Kursformel in der Malkiel'schen Form $p_{oa}^{(\frac{2n}{2})}$ der Halbjahres-, sondern in der Form der Jahresverzinsung $p_{oa}^{(n)}$ zu verwenden, wobei der Nennwert 1 und nicht 100 sein soll. Außerdem ist zu beachten, daß

1) Der Buchstabe "p" (probability) wird von Malkiel zur Bezeichnung der Wahrscheinlichkeit (w_i ; $i=1, \dots, n$) verwendet.

2) Malkiel, B.G., a.a.O., S. 66

3) ders., a.a.O., S. 58

4) Es handelt sich hier um die mathematischen Bedingungen, die hinsichtlich der Lage der Randzinssätze zum Coupon-satz, also hinsichtlich des Verhältnisses der Teilstreifenbreite sowie hinsichtlich des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeitsfaktoren, bestehen müssen. S. Abschnitt VI, 11

die Malkiel'schen Kurswerte und damit auch die durch arithmetische Mittlung dieser Kurse - gewichtet oder ungewichtet - entstehenden Ausgleichskurse sich ausnahmslos auf den Zeitpunkt $t+1$ beziehen, was die Laufzeit von $t = t + 0$ an gerechnet um ein Jahr verkürzt. Das heißt bei einer 20-jährigen Laufzeit von $t = t + 0$ an gerechnet ist die in der Kursformel zu verwendende (Rest-)Laufzeit 19 Jahre.

Bei der Berechnung der Ausgleichskurse (Laufzeit $n+1$ Jahre) ergeben sich dann für die Randkurse $p_{oi}^{(n)}$ ($i=1,2$), die zu den Randzinssätzen r_i ($i=1,2$) gehören, die folgenden Kursgleichungen

$$p_{oi}^{(n)} = \left[1 + \frac{r_o [(1 + r_i)^n - 1]}{(1 + r_i) - 1} \right] : (1 + r_i)^n \quad (i=1,2).$$

Diese Kursgleichungen lassen sich folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned} p_{oi}^{(n)} &= \frac{r_i - r_o + r_o (1 + r_i)^n}{r_i (1 + r_i)^n} \\ &= \frac{1 - \frac{r_o}{r_i}}{(1 + r_i)^n} + \frac{r_o}{r_i} . \end{aligned}$$

Wie man sieht, bedeutet diese Schreibweise eine Zerlegung des Kurswertes $p_{oi}^{(n)}$ in einen von n unabhängigen Wert

$$\frac{r_o}{r_i} \text{ d.i. Grenzwert von } p_{oi}^{(n)} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

und einen von n abhängigen, aber mit wachsendem n abnehmenden Quotienten

$$\frac{1 - \frac{r_o}{r_i}}{(1 + r_i)^n} .$$

Bei gegebenen Randwerten r_1 und r_2 erhält man für den Ausgleichskurs, wenn für die Randwerte die Wahrscheinlichkeitsverteilung w_1 bzw. w_2 (mit $w_1 + w_2 = 1$) angenommen wird, den Ausdruck

$$p_{oa}^{(n)} = \frac{w_1 \left(1 - \frac{r_o}{r_1}\right)}{(1 + r_1)^n} + \frac{w_2 \left(1 - \frac{r_o}{r_2}\right)}{(1 + r_2)^n} + w_1 \cdot \frac{r_o}{r_1} + w_2 \cdot \frac{r_o}{r_2}.$$

Die beiden letzten Glieder der rechten Seite ergeben für sich allein genommen den gewichteten Konsolenausgleichskurs $p_{oa}^{(\infty)}$ für die Randwerte r_1 und r_2 mit den zugehörigen Gewichten w_1 und w_2 , denn wie bereits vorher gezeigt wurde, ergibt sich für $p_{oa}^{(\infty)}$ der folgende Ausdruck

$$p_{oa}^{(\infty)} = \frac{r_o}{r^{(\infty)}} = \left(\frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2} \right) \cdot r_o.$$

10.a) Kurvenuntersuchung

Für die Berechnung des Differentialquotienten $\frac{dp}{dn}$

- abgekürzt P' - benötigt man den mathematischen Ausdruck für die Ableitung der Exponentialfunktion

$$y = a^x, \quad \text{oder allgemeiner} \quad y = c_1 a^{c_2 \cdot x}$$

Diese Ableitung lautet

$$y' = c_1 a^{c_2 \cdot x} \cdot \ln a^{c_2}.$$

c_2 ist bei der Anwendung dieser Ableitung auf die Gleichung für die Ausgleichskurs-Kurve $p_{oa}^{(n)} = f(n)$ gleich (-) 1 zu setzen, da

-
- 1) Die Verschiebung um ein Jahr (bezogen auf den Zeitpunkt t statt $t+1$) wird hier nicht berücksichtigt.

$$\frac{1}{(1+r_i)^n} = (1+r_i)^{-n} = (1+r_i)^{-1 \cdot n} \quad \text{ist.}$$

Nach diesem mathematischen Ausdruck für die Ableitung der Exponentialfunktion in der obigen Form erhält man für $p_{oa}^{(n) '}$ als Funktion von n den Ausdruck

$$\begin{aligned} p_{oa}^{(n) '}&= w_1 \left(1 - \frac{r_o}{r_1}\right) \left[(1+r_1)^{-1}\right]^n \cdot \ln(1+r_1)^{-1} \\ &+ w_2 \left(1 - \frac{r_o}{r_2}\right) \left[(1+r_2)^{-1}\right]^n \cdot \ln(1+r_2)^{-1} \\ &= - \frac{w_1 \left(1 - \frac{r_o}{r_1}\right)}{(1+r_1)^n} \ln(1+r_1) - \frac{w_2 \left(1 - \frac{r_o}{r_2}\right)}{(1+r_2)^n} \ln(1+r_2). \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, daß

$$\begin{aligned} r_1 < r_o, \quad \text{also} \quad 1 - \frac{r_o}{r_1} \quad \text{negativ,} \\ \frac{r_o}{r_1} - 1 \quad \text{daher positiv ist,} \end{aligned}$$

was sich als entscheidend für das Vorhandensein eines Extremums von $p_{oa}^{(n)}$ erweisen wird (notwendige Bedingung dafür ist, daß an der Stelle $n=n_e$ $p_{oa}^{(n) '}=0$ ist).

Für $p_{oa}^{(n) '}=0$ geht die obige Gleichung über in

$$\frac{w_2 \left(1 - \frac{r_o}{r_2}\right) \cdot \ln(1+r_2)}{(1+r_2)^{n_e}} = \frac{w_1 \left(\frac{r_o}{r_1} - 1\right) \cdot \ln(1+r_1)}{(1+r_1)^{n_e}},$$

oder

$$\frac{w_2 \left(1 - \frac{r_o}{r_2}\right) \ln(1+r_2)}{w_1 \left(\frac{r_o}{r_1} - 1\right) \ln(1+r_1)} = \left(\frac{1+r_2}{1+r_1}\right)^{n_e}.$$

Durch Logarithmieren dieser Gleichung ergibt sich, wenn man für den Bruch auf der linken Seite die Abkürzung Br_1 und für den Bruch auf der rechten Seite die Abkürzung Br_2 wählt,

$$n_e = \frac{\lg Br_1}{\lg Br_2}.$$

b) Untersuchung auf das Vorhandensein von Extremwerten

Als Anwendungsbeispiel für die oben durchgeführte allgemeine Berechnung von n_e seien folgende Zahlenwerte gegeben:

$$r_0 = 0,04; \quad r_1 = 0,03; \quad r_2 = 0,05;$$

$$w_1 = \frac{1}{3}; \quad (w_2 \text{ also} = \frac{2}{3}),$$

d.h. es liege ein Normalintervall gleicher oberer und unterer Streifenbreite etwa in der Mitte des historischen Intervalles vor.

Man findet dann für Br_1 den Zahlenwert

$$\begin{aligned} Br_1 &= \frac{\frac{2}{3} (1 - \frac{0,04}{0,05}) \ln 1,05}{\frac{1}{3} (\frac{0,04}{0,03} - 1) \ln 1,03} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 0,04879}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,029559} \\ &= \frac{6 \cdot 0,04879}{5 \cdot 0,029559} = 1,9807165 \approx 1,98 \end{aligned}$$

und für Br_2 den Zahlenwert

$$Br_2 = \frac{1,05}{1,03} = 1,0194174.$$

Aus den Logarithmen (der Einfachheit halber werden jetzt dekadische Logarithmen verwendet)

$$\text{von } Br_1 \quad \lg Br_1 = \lg 1,98 = 0,2968$$

$$\text{von } Br_2 \quad \lg Br_2 = \lg 1,05 - \lg 1,03 = 0,0084$$

erhält man durch Division dieser Logarithmen für die gesuchte Stelle n_e des Extremums

$$n_e = \frac{0,2968}{0,0084} = 35,3, \text{ also rund } 35 \text{ Jahre.}$$

Ob an der Stelle $n = 35,3$ Jahre tatsächlich ein Extremum (relatives Max. bzw. relatives Min.) vorliegt und welcher Art dieses Extremum ist, ergibt sich durch Einsetzen des gefundenen Wertes für n ($n_e = 35,3$) in die zweite Ableitung von $p_{Oa}^{(n)}$, die an dieser Stelle nicht verschwinden darf (hinreichende Bedingung für ein Extremum der ursprünglichen Funktion).

c) Untersuchung auf Vorhandensein eines Wendepunktes,
Feststellung der Art des vorhandenen Extremums

Da auch für die Entscheidung der Frage, ob die (Preis-) Kurve einen Wendepunkt besitzt oder nicht, diese Ableitung untersucht werden muß (das Verschwinden der 2. Ableitung an der Stelle $n = n_w$ stellt die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines solchen Kurvenpunktes dar), soll zunächst diese Ableitung in der allgemeinen Form angegeben werden

$$\frac{d^2 p^{(n)}}{dn^2} = p_{Oa}^{(n)''} = \frac{w_1 \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \left[\ln(1 + r_1)\right]^2}{(1 + r_1)^n} + \frac{w_2 \left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right) \cdot \left[\ln(1 + r_2)\right]^2}{(1 + r_2)^n}.$$

Für die Untersuchung von $p_{Oa}^{(n)''}$ an der Stelle $n = n_e$ ist es zweckmäßig, die letzte Gleichung folgendermaßen umzuformen

$$p_{oa}^{(n)} = \left[\frac{w_1(1 - \frac{r_o}{r_1})}{(1 + r_1)^n} \cdot \ln(1+r_1) + \frac{w_2(1 - \frac{r_o}{r_2})}{(1 + r_2)^n} \ln(1+r_2) \right] \ln(1+r_1) \\ + \left[\frac{w_2(1 - \frac{r_o}{r_2})}{(1 + r_2)^n} \cdot \ln(1+r_2) - \frac{w_2(1 - \frac{r_o}{r_2})}{(1 + r_2)^n} \ln(1+r_1) \right] \ln(1+r_2)$$

Wie man sieht, geht diese Gleichung aus der vorhergehenden durch gleichzeitige Addition und Subtraktion des Hilfs-
gliedes

$$\frac{w_2(1 - \frac{r_o}{r_2})}{(1 + r_2)^n} \ln(1 + r_1) \ln(1 + r_2)$$

hervor, wodurch erreicht wird, daß die 1. eckige Klammer
im Ausdruck für $p_{oa}^{(n)}$ für $n = n_e$ verschwindet.

Somit bleibt für $n = n_e$ nur die 2. Klammer der rechten
Seite übrig, aus der sich noch die Faktoren

w_2 und $(1 - \frac{r_o}{r_2})$, sowie der Nenner $(1 + r_2)^{n_e}$ aus-
klammern lassen.

Schließlich reduziert sich der Ausdruck für $p_{oa}^{(n)}$
an der Stelle $n = n_e$ auf

$$\frac{w_2(1 - \frac{r_o}{r_2})}{(1 + r_2)^{n_e}} \ln(1 + r_2) \left[\ln(1 + r_2) - \ln(1 + r_1) \right]$$

oder

$$\frac{w_2(1 - \frac{r_o}{r_e})}{(1 + r_2)^{n_e}} \ln(1 + r_2) \cdot \ln \frac{1 + r_2}{1 + r_1}.$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich positiv, da für

$r_2 > r_1$ der Bruch

$$\frac{1 + r_2}{1 + r_1} > 1, \text{ also der Logarithmus}$$

dieses Bruches > 0 ist.

Daß die anderen Faktoren positiv sind, wurde bereits oben gesagt.

Da also $p_{oa}^{(n)''}$ ($n = n_e$) $\neq 0$, und zwar > 0 ist, liegt für $n_e = 35,3$ Jahre ein Minimum der ursprünglichen Ausgleichskurskurve vor.

Ob die Ausgleichskurskurve $p_{oa}^{(n)}$ als Funktion der Laufzeit n einen Wendepunkt besitzt - was wegen des Vorhandenseins eines Extremums und wegen der asymptotischen Annäherung des Ausgleichskurses an den Ausgleichs-Konsolkurs von vornherein naheliegt - läßt sich durch Einsetzung der Werte des obigen Beispiels in die allgemeine Gleichung für $p_{oa}^{(n)''}$ und durch die Untersuchung der durch Nullsetzen von $p_{oa}^{(n)''}$ gewonnenen Bestimmungsgleichung für $n = n_w$ feststellen. Das Verschwinden von $p_{oa}^{(n)''}$ an der Stelle $n = n_w$ ist zwar noch keine hinreichende, wohl aber eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Wendepunktes an dieser Stelle

$$0 = \frac{\frac{1}{3}(1 - \frac{0,04}{0,03})}{1,03^{n_w}} \cdot (\ln 1,03)^2 + \frac{\frac{2}{3}(1 - \frac{0,04}{0,05})}{1,05^{n_w}} (\ln 1,05)^2.$$

Da wegen

$$1 - \frac{0,04}{0,03} = \frac{0,03 - 0,04}{0,03} = -\frac{1}{3}$$

das erste Glied der rechten Seite negativ ist, addiert man es mit umgekehrtem Vorzeichen auf beiden Seiten der obigen Gleichung und erhält

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (0,029559)^2}{1,03^{n_w}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot (0,04879)^2}{1,05^{n_w}}$$

oder

$$\left(\frac{1,05}{1,03}\right)^{n_w} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} (0,04879)^2}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} (0,029559)^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung unterscheidet sich von der Exponentialform der entsprechenden Bestimmungsgleichung für n_e , d.h. von Br_1 , nur durch den Faktor

$$\frac{0,04879}{0,029559} \approx 1,65,$$

während Br_2 unverändert bleibt

$$\lg (Br_1 \cdot 1,65) = \lg Br_1 + \lg 1,65.$$

Somit erhält man für n_w den Bruch

$$n_w = \frac{\lg Br_1 + \lg 1,65}{\lg Br_2} = \frac{0,2968 + 0,2175}{0,0084}$$

$$\approx 61,23 \text{ Jahre.}$$

Die Existenz eines Wendepunktes ist mathematisch erst dann gesichert, wenn auch die hinreichende Bedingung (Nichtverschwinden der 3. Ableitung der ursprünglichen Funktion an der Stelle $n = n_w$) erfüllt ist.

Der Nachweis der Richtigkeit dieser Tatsache kann in der gleichen Weise durchgeführt werden wie oben die Untersuchung von $p_{oa}^{(n)}$, durch die das Vorhandensein eines Minimums der betrachteten Funktion nachgewiesen wurde.

Es ergibt sich, daß tatsächlich zunächst für das obige Zahlenbeispiel, dann - unter bestimmten sehr einfachen Bedingungen - allgemein, sowohl ein Minimum als auch ein Wendepunkt vorhanden sind. Die genannte (einfache) Voraussetzung¹⁾ ist:

r_0 , r_1 und r_2 müssen sämtlich größer Null sein und außerdem muß

sowohl $r_2 > r_0$ als auch $r_1 < r_0$ gelten.

1) S. Abschnitt VI, 11, S. 284 ff.

Denn nur in diesem Falle haben

$$1 - \frac{r_0}{r_1} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{r_0}{r_2}$$

entgegengesetzte Vorzeichen, was als entscheidend für das sinnvolle Delogarithmieren (keine Logarithmen negativer Zahlen) erkannt worden ist.

11. Ergänzende Bemerkungen zum Kurvenverlauf der Ausgleichskurse in Abhängigkeit von der Laufzeit

Auch im 2. Beispiel Malkiels, dessen überraschendes Ergebnis hinsichtlich der Ertragssätze (Maximum des Ertragsatzes bei etwa 20 Jahren) Malkiel besonders hervorhebt¹⁾, findet man für den Verlauf der Preiskurve (Ausgleichskurse in Abhängigkeit von der Laufzeit) bei längeren Laufzeiten sowohl ein Minimum (bei etwa 120 Jahren) als auch einen Wendepunkt (bei etwa 160 Jahren).

Dieses mindestens ebenso überraschende Ergebnis ist aus der Tabelle 3-3 bei Malkiel nicht ersichtlich und auch kaum zu vermuten.

Das liegt daran, daß in dieser Tabelle keine Kurs- und Zinsstrukturwerte für Laufzeiten zwischen 50 Jahren und Unendlich aufgeführt werden, obwohl hier gerade bei den von Malkiel gewählten Zahlenwerten für die Kurse die kritischen Punkte (Extrema, Wendepunkte) liegen.

Bei der numerischen Durchrechnung der Mittelwerte (Ausgleichskurse) mit den Malkiel'schen Zahlenwerten

$$r_0 = 2,5\%; \quad r_1 = 2,0\%; \quad r_2 = 3,5\%; \\ w_1 = \frac{1}{4}; \quad w_2 = \frac{3}{4}$$

ist zu berücksichtigen, daß

1. mit halbjähriger statt mit ganzjähriger Verzinsung, also mit der Kursformel

1) Vgl. Malkiel, B.G., a.a.O., S. 66

$$P_{oa}^{(\frac{2n}{2})} = w_1 \left[1 + \frac{r_o}{2} \cdot \frac{(1 + \frac{r_1}{2})^{2n} - 1}{\frac{r_1}{2}} \right] : (1 + \frac{r_1}{2})^{2n} +$$

$$w_2 \left[1 + \frac{r_o}{2} \cdot \frac{(1 + \frac{r_2}{2})^{2n} - 1}{\frac{r_2}{2}} \right] : (1 + \frac{r_2}{2})^{2n}$$

zu rechnen ist und

2. die Laufzeit n bei $P_{oa}^{(\frac{2n}{2})}$, genauer $(P_{oa}^{(\frac{2n}{2})})_{t+1}$,

sich auf den Zeitpunkt $t+1$ bezieht, was für die Zeit $t = t+0$ als Bezugspunkt eine Laufzeit von $n+1$ Jahren ergibt.

Entsprechend der oben durchgeführten Umformung der Kursformel $P_{oa}^{(n)}$ bei ganzjähriger Verzinsung läßt sich auch die Gleichung für die halbjährige Verzinsung für

$$P_{oa}^{(\frac{2n}{2})}$$

folgendermaßen umformen:

$$P_{oa}^{(\frac{2n}{2})} = \frac{(1 - \frac{r_o}{r_1}) w_1}{(1 + \frac{r_1}{2})^{2n}} + \frac{(1 - \frac{r_o}{r_2}) w_2}{(1 + \frac{r_2}{2})^{2n}} + \frac{r_o}{r^{(\infty)}}$$

wobei $\frac{1}{r^{(\infty)}}$ für $\frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2}$ steht.

Die Ableitung nach n ergibt

$$\frac{dP^{(n)}}{dn} = P_{oa}^{(\frac{2n}{2})}' = \frac{-(\frac{r_o}{r_1} - 1) \cdot w_1}{(1 + \frac{r_1}{2})^{2n}} \cdot \left[-2 \ln (1 + \frac{r_1}{2}) \right]$$

$$+ \frac{(1 - \frac{r_o}{r_2}) w_2}{(1 + \frac{r_2}{2})^{2n}} \cdot \left[-2 \ln (1 + \frac{r_2}{2}) \right]$$

die für $n = n_e$ wegen $p_{oa}^{(n)'} = 0$ in den Ausdruck

$$\frac{\left(\frac{r_0}{r_1} - 1\right) \cdot w_1 \cdot 2 \cdot \ln\left(1 + \frac{r_1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right) \cdot w_2 \cdot 2 \cdot \ln\left(1 + \frac{r_2}{2}\right)} = \frac{1 + \frac{r_1}{2}}{1 + \frac{r_2}{2}} \quad \text{übergeht.}$$

Delogarithmieren ergibt dann für $2 \cdot n_e$ nach Einsetzung der Zahlenwerte von Malkiel und Vertauschung von Zähler und Nenner

$$2n_e = \frac{\lg\left(\frac{0,035-0,025}{0,055} \cdot 0,75 \cdot \ln 1,0175\right) - \lg\left(\frac{0,025-0,02}{0,02} \cdot 0,25 \cdot \ln 1,01\right)}{\lg 1,0175 - \lg 1,01}$$

Für $2n_e$ erhält man den Bruch

$$2n_e = \frac{0,7801}{0,0032} = 243,73, \quad \text{somit also für } n_e$$

den Wert 121,89 oder abgerundet 122 Jahre.

In entsprechender Weise erhält man für $2n_w$ den Bruch

$$\frac{1,0249}{0,0032} = 320,28, \quad \text{also } n_w = 160,14 \text{ Jahre,}$$

abgerundet 160 Jahre.

Bezüglich des Verlaufs der Kurve des Ausgleichskurses $p_{oa}^{(n)}$ in Abhängigkeit von der Laufzeit n (Ausgleichskurskurve) ¹⁾ ist zu sagen, daß die i.a. asympotische Annäherung dieses Kurses an den (Ausgleichs-) Konsolkurs

$$r_o p_{oa}^{(\infty)} \quad \left(\text{also an das } n\text{-freie Glied } r_o \left(\frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2}\right), \text{ der}\right.$$

sich durch arithmetische Mittelung aus den Funktionswerten

$$r_o p_{o(r_1)}^{(n)} \quad \text{und} \quad r_o p_{o(r_2)}^{(n)}$$

den beiden Randzinssätzen r_1 und r_2 gehören und deren Asymptoten bei

1) Vgl. S. 275

$$r_o p_o(r_1) = \frac{r_o}{r_1} = \frac{0,04}{0,03} = 1,3 \quad \text{bzw.} \quad r_o p_o(r_2) = \frac{r_o}{r_2} = \frac{0,04}{0,05} = 0,8$$

liegen, in verschiedener Weise ¹⁾ erfolgen kann.

Die Einschränkung "i.a." soll besagen, daß sich die asymptotische Annäherung bei bestimmten Werten der Gewichtsfaktoren w_1, w_2 auch so vollziehen kann, daß sich die Funktionswerte der Ausgleichskurskurve an den Ausgleichs-Konsolkurs nicht wie bei der Annäherung der Kurskurven für die Randzinssätze an die Rand-Konsolkurven, bei denen die Annäherung ausnahmslos nur von einer Seite (bei $1,3$ von unten, bei $0,8$ von oben) erfolgt, nähern, sondern daß diese "asymptotische Annäherung" u.U. auch oszillierend in dem Sinne vor sich gehen kann, daß die Ausgleichskurskurve die Gerade des Ausgleichs-Konsolkurses schon bei einer endlichen Laufzeit $n < \infty$ schneidet. ²⁾

Die Annäherung der Ausgleichskurskurve an den Ausgleichs-Konsolkurs geschieht dann von der "anderen Seite", wobei natürlich (mindestens) ein Extremum und ein Wendepunkt entstehen.

So nimmt die Kurve, die zum Ausgleichskurs

$$r_o p_{oa}(n) = \left(\frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2}\right) \cdot r_o + \frac{w_1(r_1 - r_o)}{r_1(1+r_1)^n} + \frac{w_2(r_2 - r_o)}{r_2(1+r_2)^n}$$

gehört, als Funktion von n den Zahlenwert des Ausgleichs-

Konsolkurses $r_o \left(\frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2}\right)$ nicht nur für $n = \infty$ an, sondern

auch für den endlichen Laufzeitwert $n = n_o$, für den

$$r_o p_{oa}(n) - r_o p_{oa}(\infty) = \frac{w_1(r_1 - r_o)}{r_1(1+r_1)^{n_o}} + \frac{w_2(r_2 - r_o)}{r_2(1+r_2)^{n_o}} = 0 \quad \text{wird.}$$

Faßt man die letzte Gleichung als "Bedingungsgleichung"

1) entsprechend den verschiedenen Typen der Ertragskurven bei Malkiel (vgl. Abschn. I,6)

2) Das entspricht der "humped curve" bei den Ertragssätzen, s. Abschn. I,6.

(Bedingung für das Schneiden der Ausgleichs-Konsolgeraden mit der Ausgleichskurskurve) für die beiden Variablen n_0 und w_1 (mit w_1 ist auch $w_2 = 1 - w_1$ bestimmt) auf, wobei die Randzinssätze r_1 und r_2 sowie der Couponsatz r_0 als gegeben betrachtet werden, so erhält man für w_1 (bzw. w_2) in Abhängigkeit von n folgenden Ausdruck

$$w_1 = \frac{(r_2 - r_0) (1 + r_1)^{n_0} \cdot r_1}{(r_2 - r_0) \cdot r_1 (1 + r_1)^{n_0} + (r_0 - r_1) \cdot r_2 (1 + r_2)^{n_0}} \quad (\text{bzw.}$$

$$w_2 = \frac{(r_0 - r_1) \cdot r_2 (1 + r_2)^{n_0}}{(r_0 - r_1) \cdot r_2 (1 + r_2)^{n_0} + (r_1 - r_0) \cdot r_1 (1 + r_1)^{n_0}}).$$

Daraus ergibt sich für das Verhältnis $\frac{w_1}{w_2}$ der Wert

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{(r_2 - r_0) \cdot r_1}{(r_0 - r_1) \cdot r_2} \cdot \frac{(1 + r_1)^{n_0}}{(1 + r_2)^{n_0}}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich sogleich zweierlei ablesen, nämlich daß

1. r_0 stets zwischen r_1 und r_2 liegen muß, damit die Ausgleichskurve schon bei einer endlichen Laufzeit $n_0 < \infty$ den gleichen Zahlenwert wie der Ausgleichs-Konsolkurs annimmt. Wäre das nicht der Fall, so müßte entweder $r_2 - r_0$ oder $r_0 - r_1$ und damit auch das Verhältnis $w_1 : w_2$

negativ werden, was der Definition von w_1 und w_2 (beide müssen positiv und, da ihre Summe gleich 1 ist, auch kleiner als 1 sein) widerspricht und

2. daß, da die Quotienten $\frac{r_1}{r_2}$ und $\frac{1 + r_1}{1 + r_2}$ beide kleiner als 1 sind und da die Laufzeit n_0 selbstverständlich ≥ 0 sein muß, der Ausdruck $\frac{r_1}{r_2} \left(\frac{1 + r_1}{1 + r_2} \right)^n$ mit wachsendem n immer kleiner wird.

Für $r_2 - r_0 = r_0 - r_1$, d.h. bei gleicher Teilstreifenbreite,

muß das Verhältnis der Gewichtungsfaktoren (Wahrscheinlichkeitsfaktoren) w_1 und w_2 zueinander, also

$\frac{w_1}{w_2}$, kleiner als $\frac{r_1}{r_2}$ sein und, falls $n_o \geq 1$ sein soll, sogar kleiner als $\frac{r_1(1+r_1)}{r_2(1+r_2)}$.

Mit den Zahlenwerten $r_1 = 0,03$; $r_2 = 0,05$ und $r_o = 0,04$ erhalten die Quotienten $\frac{r_1}{r_2}$ bzw. $\frac{r_1(1+r_1)}{r_2(1+r_2)}$ die entsprechenden Werte $\frac{3}{5} = 0,6$ bzw. $\frac{3 \cdot 1,03}{5 \cdot 1,05} = 0,5886$,

d.h. man findet - da

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1}{1-w_1}$$

ist - für w_1 im Falle $n_o \geq 0$ die obere Schranke

$\frac{3}{3+5} = \frac{3}{8} = 0,375$, im Falle $n_o \geq 1$ die obere Schranke

$$\frac{3 \cdot 1,03}{3 \cdot 1,03 + 5 \cdot 1,05} = 0,3705035.$$

Haben der obere und der untere Teilstreifen unterschiedliche Breiten wie im 1. Beispiel von Malkiel ($r_1 = 3,5\%$; $r_2 = 5\%$; $r_o = 4,5\%$), wo der untere Teilstreifen doppelt so breit ist wie der obere, bzw. in seinem 2. Beispiel ($r_1 = 2\%$; $r_2 = 3,5\%$; $r_o = 2,5\%$), wo der obere Teilstreifen doppelt so breit ist wie der untere, so ergeben sich für $w_1 : w_2$ bzw. für w_1 folgende (obere) Schranken

$$1. \quad \frac{w_1}{w_2} \leq \lim_{n_o \rightarrow 0} \left(\frac{r_2 - r_o}{r_o - r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{1+r_1}{1+r_2} \right)^{n_o} \right) = \frac{5-4,5}{4,5-3,5} \cdot \frac{3,5}{5} = 0,35,$$

$$\text{also } w_1 \leq \frac{3,5}{8,5} = 0,4117647$$

$$2. \quad \frac{w_1}{w_2} \leq \frac{3,5-2,5}{2,5-2} \cdot \frac{2}{3,5} = 2,0,5714285 > 1.$$

Im 2. Beispiel von Malkiel ¹⁾ gibt es bei der dort ange-

1) Vgl. S. 249

nommenen Lage und Breite der Teilstreifen - abgesehen von der selbstverständlichen Voraussetzung $n_0 \geq 0$ - keinerlei Beschränkung für die Werte von w_1 (bzw. $w_1:w_2$).

Erst wenn man verlangt, daß der Schnittpunkt der Ausgleichskurskurve mit der Geraden des Ausgleichs-Konsolkurses eine bestimmte Grenzlaufzeit $\bar{n}_0$, deren Zahlen-

wert sich aus

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{4}{3,5} \left(\frac{1,02}{1,035} \right)^{\bar{n}_0} = 1 \quad \text{zu}$$

$$\bar{n}_0 = \lg \frac{3,5}{4} : \lg \frac{1,02}{1,035} \approx 9,2$$

ergibt, nicht unterschreitet, lassen sich wieder obere Schranken für w_1 (bzw. $w_1 : w_2$) angeben, die nicht unterschritten werden dürfen, wenn die obigen Voraussetzungen (bezüglich der Lage des genannten Schnittpunktes) erfüllt sein sollen.

Z.B. erhält man bei $n=10$ für $w_1:w_2$ die obere Schranke

$$w_1 : w_2 \leq \frac{4}{3,5} \cdot \left(\frac{1,02}{1,035} \right)^{10} = 0,9876198,$$

oder für w_1 die Schranke

$$w_1 \leq \frac{0,9876198}{1,9876198} = 0,4968856.$$

Da das Verschwinden der 1. Ableitung einer Funktion an einer bestimmten "Stelle" (d.h. für einen bestimmten Argumentwert) notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums dieser Funktion ist, muß man bei der Frage, ob und wann bei der Ausgleichskurskurve Extrema (bzw. Wendepunkte) auftreten, zunächst die 1. (bei Wendepunkten, bzw. bei der Entscheidung über die Art der der Extrema, auch die 2.) Ableitung bilden und untersuchen.

Die 1. Ableitung

$$\frac{dp_{Oa}^{(n)}}{dn} = \frac{w_1(r_1 - r_0)(-\ln(1+r_1))}{r_1(1+r_1)^n} + \frac{w_2(r_2 - r_0)(-\ln(1+r_2))}{r_2(1+r_2)^n}$$

möge für $n=n_e$ (Stelle eines möglichen "Extremums") verschwinden. Die entsprechende Bedingungsgleichung

$$\frac{dp^{(n)}_{0a}}{dn} = 0,$$

die man wieder entweder nach n_e oder nach w_1 (bzw. $w_1:w_2$) auflösen kann, lautet dann

$$\frac{w_1 \cdot (r_0 - r_1) r_2 \ln(1+r_1)}{w_2 \cdot (r_2 - r_0) r_1 \ln(1+r_2)} = \left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{n_e},$$

was (unter der selbstverständlichen Bedingung positiver Laufzeiten, also von $n_e \geq 0$) für $w_1 : w_2$ den Ausdruck (obere Schranke)

$$\frac{w_1}{w_2} \leq \frac{(r_2 - r_0)}{(r_0 - r_1)} \frac{r_1}{r_2} \frac{\ln(1+r_2)}{\ln(1+r_1)}$$

ergibt, wo

$$\lim_{n_e \rightarrow 0} \left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{n_e} = 1$$

gesetzt worden ist.

Mit den Zahlenwerten $r_1 = 0,03$; $r_2 = 0,05$; $r_0 = 0,04$ liefert dieser Quotient für $w_1 : w_2$ die obere Schranke

$$\frac{r_1 \cdot \ln(1+r_2)}{r_1 \ln(1+r_2) + r_2 \ln(1+r_1)} = \frac{0,9891891}{1,9891891} = 0,4972825.$$

Es ergeben sich also für w_1 zwei verschiedene obere Schranken: Beim Beispiel $(3/5/4)$, nämlich einerseits $w_1 \leq \frac{r_1}{r_1+r_2} = 0,375$, wenn der Schnittpunkt der Ausgleichs-

kurskurve mit der Ausgleichs-Konsolgeraden im positiven Laufzeitbereich ($n \geq 0$) liegen soll,

andererseits die obere Schranke

$$w_1 \leq \frac{r_1 \cdot \ln(1+r_2)}{r_1 \ln(1+r_2) + r_2 \ln(1+r_1)} = 0,4972825,$$

wenn "nur" verlangt wird, daß das (mögliche) Extremum dieser

Funktion im positiven Laufzeitbereich liegt, der dann notwendig vorhandene Schnittpunkt mit der Ausgleichs-Konsolgeraden aber im negativen Laufzeitbereich sich befindet.

Tatsächlich erhält man, wenn man für w_1 etwa den Zahlenwert $w_1 = 0,4$ annimmt, ein Extremum bei $n_e \approx 20,4$, aber einen im negativen Laufzeitbereich, nämlich bei $r_0 = -2,3854166$ liegenden Schnittpunkt mit der Ausgleichs-Konsolgeraden, die ja für $n \rightarrow \infty$ die Asymptoten-gerade der Ausgleichskurskurve bildet.

Soll ein solcher Kurvenverlauf ausgeschlossen werden, so läßt sich die Bedingung für das Auftreten eines Extremums der Ausgleichskurskurve dahingehend verschärfen, daß man als obere Schranke für w_1 nicht den aus der notwendigen Bedingung für ein Extremum hergeleiteten Zahlenwert ¹⁾, sondern den für einen im positiven Laufzeitbereich liegenden Schnittpunkt der Kurve mit der Asymptoten-gerade,

$$\text{z.B. } w_1 \leq \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad (\text{im obigen Beispiel } 0,0375) \text{ benutzt.}$$

Z.B. erhält man für $w_1 = 0,35$ ($0,35$ ist sowohl kleiner als $0,375$ als auch kleiner als $0,4972825$) einerseits mit

$$\frac{w_1(r_0 - r_1) \cdot r_2}{w_2(r_2 - r_0) \cdot r_1} = \left(\frac{1+r_1}{1+r_2} \right)^{n_0}$$

oder in Zahlen

$$\frac{0,35 \cdot 1,0,05}{0,65 \cdot 1,0,03} = \left(\frac{1,03}{1,05} \right)^{n_0},$$

$$\text{also } n_0 = \frac{\lg 35 - \lg 39}{\lg 1,03 - \lg 1,05} \approx 5,6$$

einen Schnittpunkt im positiven Laufzeitbereich ($5,6$ Jahre), als auch ein Extremum, das wegen

1) Für $n_e = 0$ ergab sich oben der w_1 -Wert $w_1 \leq 0,4972825$.

$$\frac{w_1(r_0 - r_1) \cdot r_2 \cdot \ln(1+r_1)}{w_2(r_2 - r_0) \cdot r_1 \cdot \ln(1+r_2)} = \left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{n_e}$$

oder in Zahlen

$$\frac{0,35 \cdot 0,05 \cdot 0,0296}{0,65 \cdot 0,03 \cdot 0,0488} = \left(\frac{1,03}{1,05}\right)^{n_e} = 0,5443463,$$

$$\text{also } n_e \approx 31,63 \quad 1),$$

bei rund 32 Jahren, also ebenfalls im positiven Laufzeitbereich, liegt.

Der Wert des Ausgleichs-Konsolkurses $r_{0a}^{(\infty)} = r_0 \left(\frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2} \right)$

für $r_1 = 0,03$; $r_2 = 0,05$ und $r_0 = 0,04$ ist, wenn man

für w_1 den Wert $\frac{3 \cdot 1,03}{3 \cdot 1,03 + 5 \cdot 1,05} = 0,3705035$ (für

w_2 mithin $\frac{5 \cdot 1,05}{5 \cdot 1,05 + 3 \cdot 1,03}$) einsetzt, also die Ausgleichskurskurve betrachtet, die zum 1. Male den Wert des Ausgleichs-Konsolkurses bei $n = 1$ annimmt, gleich

$$\frac{4 \cdot (1,03 + 1,05)}{3 \cdot 1,03 + 5 \cdot 1,05}, \text{ also } 4P_{0a}^{(\infty)} = 0,9976019.$$

Setzt man in die obige Bedingungsgleichung für n_e und w_1 nämlich

$$\left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{n_e} = \frac{w_1}{w_2} \frac{(r_0 - r_1) \cdot r_2 \cdot \ln(1+r_1)}{(r_2 - r_0) \cdot r_1 \cdot \ln(1+r_2)},$$

die obigen Werte für r_1, r_2, r_0 und $w_1 (= \frac{3 \cdot 1,03}{3 \cdot 1,03 + 5 \cdot 1,05})$

bzw. $w_2 (= 1 - w_1)$ ein, so erhält man daraus die folgende

Bestimmungsgleichung für n_e

$$\left(\frac{1,03}{1,05}\right)^{n_e} = \frac{3 \cdot 1,03 \cdot 5 \cdot \ln 1,03}{5 \cdot 1,05 \cdot 3 \ln 1,05} = \frac{1,03 \cdot \ln 1,03}{1,05 \cdot \ln 1,05},$$

die sich noch weiter zu $\left(\frac{1,03}{1,05}\right)^{n_e - 1} = \frac{\ln 1,03}{\ln 1,05}$ vereinfachen läßt.

Auflösung nach n_e liefert für n_e

$$n_e - 1 = \lg \frac{\lg 1,05}{\lg 1,03} : \lg \frac{1,05}{1,03} \text{ den Wert } n_e = 1 + \frac{\lg 0,0483 - \lg 0,0296}{\lg 1,05 - \lg 1,03} \\ \approx 1 + 26 = 27.$$

Die entsprechende Bestimmungsgleichung für n_w (zum Wendepunkt gehörige Laufzeit) erhält man aus der 2. Ableitung der Ausgleichskurskurve

$$\frac{d^2 p_{oa}^{(n)}}{dn^2} = \frac{w_1 (r_1 - r_0) (\ln(1+r_1))^2}{r_1 (1+r_1)^n} + \frac{w_2 (r_2 - r_0) (\ln(1+r_2))^2}{r_2 (1+r_2)^n}$$

durch Nullsetzen der rechten Seite dieser Gleichung für $n = n_w$ (notwendige Bedingung für einen möglichen Wendepunkt).

Mit den Zahlenwerten (für r_1 , r_2 , r_0 und w_1 (w_2)) des obigen Beispiels findet man die Gleichung

$$\frac{w_1 (\ln 1,03)^2}{3 \cdot 1,03^n} = \frac{w_2 (\ln 1,05)^2}{5 \cdot 1,05^n},$$

die sich mit $w_1 : w_2 = (3 \cdot 1,03) : (5 \cdot 1,05)$ noch zu

$$\left(\frac{1,03}{1,05}\right)^{n_w - 1} = \left(\frac{\ln 1,03}{\ln 1,05}\right)^2$$

vereinfachen läßt.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem entsprechenden Ausdruck für n_e , nämlich

$$\left(\frac{1,03}{1,05}\right)^{n_e - 1} = \frac{\ln 1,03}{\ln 1,05},$$

so findet man, indem man aus beiden Seiten der 1. Gleichung die 2. Wurzel zieht und dann die rechten Seiten beider Gleichungen gleichsetzt

$$\left(\frac{1,03}{1,05}\right)^{\frac{n_w - 1}{2}} = \left(\frac{1,03}{1,05}\right)^{n_e - 1}.$$

d.h. n_w kann in diesem Falle ohne weitere Rechnung aus $n_w - 1 = 2 \cdot (n_e - 1)$ zu $n_w = 2 \cdot (n_e - 1) + 1 = 2n_e - 1$ bestimmt werden.

Da für das obige Beispiel n_e den Wert $1+26 = 27$ hatte, liegt der Wendepunkt bei $2 \cdot 27 - 1 = 53$.

12. Zusammenfassung

Die engen Beziehungen, die zwischen dem erweiterten Mittelwert-Begriff (gewichteter direkter bzw. indirekter arithmetischer geometrischer harmonischer Mittelwert) insbesondere zwischen dem gewichteten harmonischen Mittelwert und der Anwendung des Normalintervall-Begriffes bei Malkiel, bestehen, lassen sich klarer erkennen und aufzeigen, und ein allgemeiner Überblick über die zahlreichen dabei zutage tretenden Ergebnisse ist leichter zu gewinnen, wenn man (abweichend von Malkiel) statt mit halbjährlicher mit jährlicher Verzinsung rechnet.¹⁾ Auch werden schon im 1. Jahr die (von den "Optimisten" bzw. "Pessimisten" mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 fest erwarteten) Randzinssätze r_1 und r_2 ,¹ wo r_2 den "oberen" und r_1 den "unteren" Intervallrand des Normalintervalles bedeuten, statt des (bei Malkiel mit dem Couponsatz r_0 übereinstimmenden) Marktzinssatzes R_1 (identisch mit dem Einperiodenterminzinssatz einer gegebenen Zinssatzfolge für das 1. Jahr) benutzt.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für eine Laufzeit von n Jahren der "Ausgleichskurs"

$$\begin{aligned} r_0 P_{oa}^{(n)} &= P_0(r_0, r_1, r_2, w_1, n) . \\ &= \left(\frac{r_0}{r_1} + \frac{1 - \frac{r_0}{r_1}}{(1+r_1)^n} \right) \cdot w_1 + \left(\frac{r_0}{r_2} + \frac{1 - \frac{r_0}{r_2}}{(1+r_2)^n} \right) \cdot w_2 , \end{aligned}$$

1) Das ist bereits bei der allgemeinen Betrachtung über die Bedingungen für das Auftreten von Extrema und Schnittpunkte der Ausgleichskurskurve mit der Ausgleichs-Konsolgeraden in Abschn. VI, 11 geschehen.

wo $w_2 = 1 - w_1$ und somit die rechte Seite eine Funktion von 5 Variablen, nämlich r_1, r_2, r_o, w_1 und n , ist. Diese reduzieren sich bei vorgegebenen Randzinssätzen und vorgegebenem Couponsatz, wenn die Verteilung auf die Randzinssätze mittels der Wahrscheinlichkeitsfaktoren w_1 und w_2 als bekannt angenommen wird, auf eine Funktion von 1 Variablen, nämlich die Laufzeit n .

Stellt man die obige Ausgleichskursgleichung (für den ungequerten Kurs) so um ¹⁾, daß die n -freien Glieder (Konsol-Komponente) und die n -enthaltenden Glieder je in einer Klammer zusammengefaßt werden, so erhält man

$$r_o p_{oa}^{(n)} = (r_o \frac{w_1}{r_1} + r_o \frac{w_2}{r_2}) + (\frac{r_1 - r_o}{r_1(1+r_1)^n} w_1 + \frac{r_2 - r_o}{r_2(1+r_2)^n} w_2).$$

Der entsprechende mit Hilfe des zum Ausgleichskurs gehörigen Effektivzinssatzes $r_e (= r_{ea}^{(n)})$ gebildete (gequerte) Kurswert $\overline{r_o p_{oa}^{(n)}}$ ist

$$\overline{r_o p_{oa}^{(n)}} = \frac{r_o}{r_e} + \frac{1 - \frac{r_o}{r_e}}{(1+r_e)^n}.$$

Führt man nach Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für den Ausgleichskurs (also nach der Kurselimination) den Grenzübergang $\lim n \rightarrow \infty$ durch, so erhält man für den Effektivzinssatz $r_e = r_e^{(\infty)}$ für Konsols die sehr einfache Gleichung

$$r_o \frac{w_1}{r_1} + r_o \frac{w_2}{r_2} = \frac{r_o}{r_e}.$$

Nach Kürzen durch r_o auf beiden Gleichungsseiten stellt die verbleibende Gleichung die Definitionsgleichung für den gewichteten direkten, harmonischen Mittelwert $r_e = r_e^{(\infty)}$ der beiden Randzinssätze r_1 und r_2 dar

$$\frac{1}{r_e} = \frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2}.$$

Ähnlich wie dieser Äquivalenzbeweis für die Gleichheit des effektiven Ausgleichs-Konsolzinssatzes $r_e^{(oo)}$ mit dem (direkten) gewichteten harmonischen Mittelwert der Randzinssätze r_1 und r_2 verläuft der allgemeine Nachweis der Übereinstimmung der Bestimmungsgleichung für $r_e (=r_e^{(1)})$,

d.h. für den Ausgleichs-Effektivzinssatz der 1. Zinsperiode, die man durch Gleichsetzung des ungequerten Ausgleichskurses für die 1. Zinsperiode (also von

$$r_o p_o^{(1)} = (r_o \frac{w_1}{r_1} + r_o \frac{w_2}{r_2}) + (\frac{r_1 - r_o}{r_1(1+r_1)} \cdot w_1 + \frac{r_2 - r_o}{r_2(1+r_2)} w_2)$$

mit der entsprechenden Gleichung für den gequerten Kurs

$$r_o p_{oa}^{(1)} = \frac{r_o}{r_e} + \frac{1 - \frac{r_o}{r_e}}{(1+r_e)}$$

erhält, mit dem gewichteten indirekten harmonischen Mittelwert der Zinssätze r_1 und r_2 , nämlich

$$1 + r_e = \frac{w_1}{1+r_1} + \frac{w_2}{1+r_2}.$$

Zu diesem Zwecke erweitert man die Brüche im 1. Klammerausdruck der Gleichung für $r_o p_{oa}^{(1)}$ mit $(1+r_1)$ bzw. $(1+r_2)$ wodurch die rechte Seite dieser Gleichung in

$$\frac{w_1 r_o (1+r_1) + w_1 (r_1 - r_o)}{r_1 (1 + r_1)} + \frac{w_2 r_o (1+r_2) + w_2 (r_2 - r_o)}{r_2 (1 + r_2)}$$

übergeht, ein Ausdruck, der sich weiter zu

$$\frac{w_1 (1+r_o)}{1 + r_1} + \frac{w_2 (1+r_o)}{1 + r_2}$$

vereinfachen läßt. Die Gleichsetzung mit dem gequerten Kurs

$$r_o p_{oa}^{(1)} = \frac{r_o}{r_e} + \frac{r_e - r_o}{1 + r_o} = \frac{r_o (1+r_e) + r_e - r_o}{r_e (1 + r_e)} = \frac{1+r_o}{1+r_e}$$

liefert, wenn man die beiden Ausdrücke durch $(1+r_o)$

kürzt, die behauptete Definitionsgleichung für den gewichteten indirekten harmonischen Mittelwert der Randzinssätze r_1 und r_2 .

Man erkennt aber auch, daß sich nur, wenn die Laufzeit n die beiden genannten Werte $n=\infty$ bzw. $n=1$ annimmt, die allgemeine Bestimmungsgleichung für den Effektivzinssatz r_e , der nach Malkiel zum Ausgleichskurs $P_{oa}^{(n)}$ gehört, nämlich

$$r_o \left(\frac{w_1}{r_1} + \frac{w_2}{r_2} \right) + \left(\frac{w_1(r_1 - r_o)}{r_1(1+r_1)^n} \right) + \frac{w_2(r_2 - r_o)}{r_2(1+r_2)^n} = \frac{r_o}{r_e} + \frac{1 - \frac{r_o}{r_e}}{(1+r_e)^n}$$

zu den genannten gewichteten harmonischen Mittelwerten (den direkten im Falle $n=\infty$ bzw. den indirekten im Falle $n=1$) vereinfacht.

C Schluß

Wer sich mit den Erklärungshypothesen der Zinsstruktur beschäftigt, hat es nicht leicht. Zwar sind die bekanntesten Erklärungshypothesen der Laufzeitstruktur des Zinses nicht so zahlreich wie die Erscheinungsformen des Zinses selbst, geschweige denn der Zinstheorien - ein Problemkreis für sich - jedoch bewegen sich all diese Hypothesen, die sich nur mit dem Teilaspekt der Abhängigkeit der Zinshöhe von der Laufzeit der Kreditverträge auseinandersetzen, auf einem sehr hohen Abstraktionsniveau.

Aus der Frage, inwieweit ein systematischer Zusammenhang zwischen den Bewegungen kurz- und langfristiger Zinssätze vorhanden ist, folgt die Überlegung, ob die Zinsstruktur durch wirtschaftspolitische Maßnahmen beeinflussbar ist oder nicht.

Wie der Glanz der Schusterkugel immer nachdenkliche und grüblerische Menschen an sich gelockt hat, um nur Hans Sachs zu erwähnen ¹⁾, hat die Beschäftigung mit diesem Gedanken eine große Zahl von Literaturbeiträgen hervorgebracht. Aber die Auseinandersetzung mit dem Problem der Laufzeitstruktur ist durchaus nicht kontemplativer Art geblieben. In den Vereinigten Staaten wurde unter der Kennedy-Administration die "Operation Twist" unternommen, ein groß angelegter Versuch, der "durch eine Beeinflussung der Fälligkeitsstruktur der Verschuldung eine Erhöhung des kurzfristigen Zinssatzes im Interesse höherer Kapitalimporte und eine Stabilisierung des langfristigen Zinssatzes auf einem vergleichsweise niedrigen Niveau zwecks Stimulierung der inländischen Investitionstätigkeit zum Ziele hatte." ²⁾

-
- 1) Vgl. Wygodzinski, W., Wandlungen der deutschen Volkswirtschaft im 19. Jahrhundert, Köln 1912, S. 43
 - 2) König, H., Wolter, J., Über den Zusammenhang zwischen kurz- und langfristigem Zinssatz: Eine Spektralanalyse der westdeutschen Zinsstruktur. Vortrag vom 13.2.1969, ersch. in der Veröffentlichungsreihe Basler Wirtschaftswissenschaftlicher Vorträge, S. 2

Die Erklärungshypothesen der Laufzeitstruktur "testbar" zu machen, hat im Schrifttum eine Entwicklung eingeleitet, die sich mehr und mehr statistischer Methoden bediente. Die Klärung der Grundbegriffe und Grundgrößen der Laufzeitstruktur kam dagegen etwas zu kurz. Die Grundbegriffe werden teilweise in der Literatur als bekannt vorausgesetzt, die Grundgrößen teilweise - zum besseren Verständnis - durch stark vereinfachte Näherungswerte dargestellt. Auf die Klärung der Abhängigkeiten dieser Grundgrößen voneinander sowie auf ihre Darstellung durch Näherungswerte wurde in dieser Arbeit besonderer Wert gelegt, was sich auch in der stattlichen Zahl der "Stellen hinter dem Komma" ausdrückt, wobei immer noch die Rechengenauigkeit des benutzten Rechengengerätes (Taschenrechner Texas Instruments) zu berücksichtigen ist. Auf die mathematische Darstellungsform konnte wegen der angestrebten Genauigkeit in dieser Arbeit nicht verzichtet werden.

Auf eine Untersuchung von Zinszeitreihen mit Hilfe der Spektralanalyse, also unter Verwendung von Fourier-Reihen, wie sie vor allem von König und Wolters zur Erklärung der Zinsstruktur durchgeführt wurden, kann in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden. Ebenso wenig wird die Analyse der Laufzeitstruktur unter Verwendung "linearer Filter", wie sie etwa Nelson ¹⁾ vorgenommen hat, hier weiter verfolgt. Die zur Erklärung der festgestellten Tendenzen angeführten Gründe sind bei diesen Verfahren nur beispielhafter, nicht aber erschöpfender Art. ²⁾ Diese Verfahren gehören in den Bereich der Statistik.

Wegen seiner Einfachheit, Klarheit und Zweckmäßigkeit erscheint das von Malkiel vorgeschlagene Normalintervallmodell besonders geeignet, die wichtigsten Probleme der

1) Nelson, Ch.R., The Term Structure of Interest Rates, New York, London 1972

2) Vgl. König, H., Wolter, J., a.a.O., S. 7

Zinsstrukturtheorie deutlich erkennen zu lassen und Ansätze für ihre Lösung zu bieten.

So entspricht auch das Modell von Modigliani-Sutch ¹⁾ (Preferred-Habitat-Modell) in der Grundidee dem Normalintervall-Modell von Malkiel insofern, als an die Stelle des Normalintervalls zwei "Normalniveaus" treten; das eine ist entsprechend der Vorstellung von Keynes ein Normalniveau der Zinssätze, "zu dem die Zinszeitreihe zurückkehrt". ²⁾ Das zweite gehört zu einem extrapolativen Element - entsprechend der Vorstellung von Duesenberry - "wonach eine Fortsetzung des jüngsten Zinstrends erwartet wird." ³⁾ Der entscheidende Unterschied zum Normalintervall-Modell besteht lediglich in der stärkeren Gewichtung der gegenwärtigen Erwartungszinssätze, so daß Zinssätze umso weniger in das Normalniveau eingehen, je weiter ihr Erwartungszeitpunkt in der Vergangenheit zurückliegt. Wegen der weitgehenden Übereinstimmung in der Grunkonzeption wurde hier zugunsten einer ausführlicheren Darstellung des Malkiel-Modells auf eine Beschreibung des Preferred-Habitat-Modells verzichtet.

1) Modigliani, F., Sutch, R. Ch., Debt Management and The Term Structure of Interest Rates: An Empirical Analysis of Recent Experience, in: The Journal of Political Economy, Bd. 75 (1967)

2) Faßbender, a.a.O., S. 67

3) ders., a.a.O., S. 68

Literaturverzeichnis

- Buse, A. Interest Rates, The Meiselman Model and Random Numbers, in: The Journal of Political Economy, Bd. 75 (1967)
- Claassen, E.M. Ein Beitrag zur Theorie der Zinsstruktur, Diss. Köln 1963
- Culbertson, J.M. The Term Structure of Interest Rates, in: Quarterly Journal of Economics, Bd. 71 (1957)
- Dürr, E. Time lags der Geldpolitik. Systematik der Zusammenhänge, Ursachen und Verkürzungsmöglichkeiten, in: Kredit und Kapital, 3. Jg. (1970), Heft 2
- Faßbender, H. Zur Theorie und Empirie der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze, in: Schriften des Instituts für das Spar-, Giro- und Kreditwesen an der Universität Bonn, Hrsg. F. Voigt, Ead. 72, Berlin 1973
- Feldstein, M.
Chamberlain, G. Multimarket Expectations and The Rate of Interest, in : Journal of Money, Credit and Banking, Bd. V (1973), Heft 4
- Hahn, O. Geld- und Devisenhandel, Sammlung Poeschel, Reihe V, Hrsg. H. Seischab, Stuttgart 1954
- ders. Bankbetriebslehre, in: Schaeffers Grundriß des Rechts und der Wirtschaft, Hrsg. H.G. Schachtschabel, Bd. 85, Stuttgart und Düsseldorf 1967
- ders. Die Zinsempfindlichkeit der Kreditnehmer, in: Österreichisches Bank-Archiv, 15. Jg. (1967) Heft X und XI

- Hahn, O. Finanzwirtschaft, in: Studienbibliothek Betriebswirtschaft - Hrsg. R. Wittgen, München 1975
- Hicks, J.R. Value and Capital, 2. Aufl., London 1946
- Höffer, H. Die Zinsstruktur in der Bundesrepublik Deutschland, Diss. Nürnberg 1975
- Kath, D. Die verschiedenen Ansätze der Zinsstrukturtheorie, in: Kredit und Kapital, Heft 1, 1972
- Kessel, R.A. The Cyclical Behavior of The Term Structure of Interest Rates, Occasional Paper 91, Hrsg. National Bureau of Economic Research, New York 1965
- König, H.
Wolter, J. Über den Zusammenhang zwischen kurz- und langfristigem Zinssatz: Eine Spektralanalyse der westdeutschen Zinsstruktur. Vortrag vom 13.2.1969, ersch. in der Veröffentlichungsreihe Basler Wirtschaftswissenschaftlicher Vorträge
- Luckett, D.G. Professor Lutz and The Term Structure of Interest Rates, in: Quarterly Journal of Economics, Bd. 73 (1959)
- Lutz, F.A. The Structure of Interest Rates, in: Quarterly Journal of Economics, Bd. 55 (1940)
- ders. Zinstheorie, 2. Aufl., Zürich, Tübingen 1967
- Malkiel, B.G. The Term Structure of Interest Rates, Princeton 1966
- Masera, R.S. The Term Structure of Interest Rates. An Expectations Model tested on Post War Italian Data, Oxford 1972

- Meiselman, D. The Term Structure of Interest Rates,
Englewood Cliffs 1962
- Michaelson, J.B. Holding Period Yields on U.S. Government
Securities and The Term Structure of
Interest Rates, in: The Journal of Finance,
Bd. 20 (1965)
- Modigliani, F.
Sutch, R. Ch. Debt Management and The Term Structure of
Interest Rates: An Empirical Analysis of
Recent Experience, in: The Journal of
Political Economy, Bd. 75 (1967)
- Neláner, M. Die Kursbildung auf dem Devisenterminmarkt
und die Devisenterminpolitik der Zentral-
banken, in: Beiträge zur Geldlehre, Hrsg.
R. Schilcher, Berlin 1970
- Nelson, Ch. R. The Term Structure of Interest Rates,
New York, London 1972
- Neumann, M. Theoretische Volkswirtschaftslehre I,
Heidelberg 1973
- Nicolas, M. Finanzmathematik, 2. Aufl., Berlin 1967
- Paish, F.W. Long-Term and Short-Term Interest Rates in
The United Kingdom, Manchester 1966
- Robinson, J. The Rate of Interest and Other Essays,
London 1962
- Schmidt, F. Internationaler Zahlungsverkehr und Wechsel-
kurs - Der Zahlungsverkehr, Bd. II,
Leipzig 1922
- Steinmann, H. Theorie der Spekulation, Kieler Studien,
Forschungsberichte des Instituts für Welt-
wirtschaft, Tübingen 1970

- Wallace, N. The Term Structure of Interest Rates and
The Maturity Composition of The Federal
Debt, Chicago 1964
- Wood, J.H. Errors and The Term Structure of Interest
Rates, in: The Journal of Political Economy,
Bd. 71 (1963)
- ders. The Expectations Hypothesis, The Yield Curve
and Monetary Policy, in: Quarterly Journal
of Economics, Bd. 78 (1964)
- Wygodzinski, W. Wandlungen der deutschen Volkswirtschaft im
19. Jahrhundert, Köln 1912

Harry Bungsche
offsetdruck
8521 BUBENREUTH

Ulrich Jaeger

Lebenslauf

geboren
Staatsangehörigkeit
Familienstand

15. August 1936 in Dortmund
deutsch
verheiratet mit Dipl.-Hdl. Hilde Kreuels,
ein Kind

Ausbildung

4 Jahre Volksschule
6 Jahre Gymnasium
2 Jahre Höhere Handelsschule and den Kauf-
männischen Unterrichtsanstalten in Dortmund
2 Jahre bei der "Orenstein & Koppel und
Lübecker Maschinenbau AG" in Dortmund
Lehrabschlußprüfung "gut"

Kaufm. Lehre

Abitur
Studium

März 1960 nach 2 Jahren Wirtschaftsoberschule;
der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
SS 1960 bis WS 1965 an der Universität zu Köln;
Wahlfächer: Industrie
Steuern
Finanzwissenschaft

Diplomarbeit: Das duale Problem der linearen
Programmierung

Abschluß als Diplom-Kaufmann

Berufsarbeit

Verwalter einer wissenschaftlichen Assisten-
tenstelle an der Universität zu Köln vom
14.2.1966 bis 31.12.1969.

Während dieser Zeit war ich vorwiegend an der
Wirtschaftsfakultät in Kabul/Afghanistan
tätig, mit der die Universität Köln eine Part-
nerschaft unterhält.

Handelstudienreferendar beim Regierungsprä-
sidenten in Arnberg von Januar bis Oktober
1970;

Lehrer am "College of Business Education" in
Dar-es-Salaam/Tansania (1971 bis Ende 1972);

Lehrer an der Fachhochschule Hagen seit dem
1.4.1973.

Dortmund, den 20.11.1976



Harry Bungsche
offsetdruck
8521 BUBENREUTH